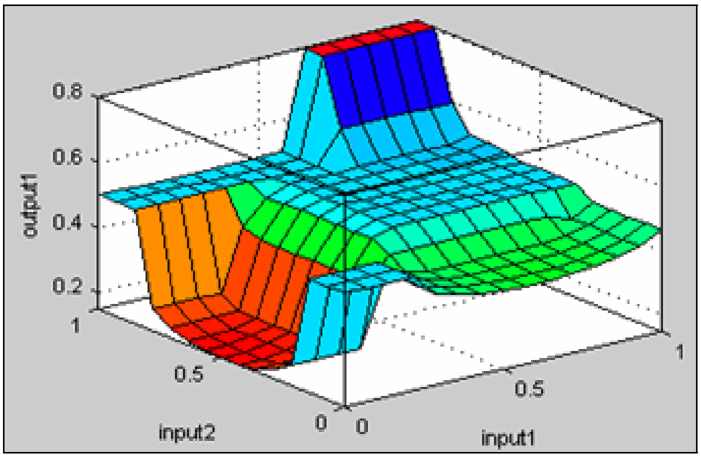
Γιάννης Α. Θεοδώρου

Δρ. Μαθηματικών-Καθηγητής Τ.Ε.Ι.

Εισαγωγή στην

ΑΣΑΦΗ ΛΟΓΙΚΗ (Fuzzy Logic)



Βασικές Αρχές της Ασαφούς Λογικής με Εφαρμογές στην Τεχνολογία

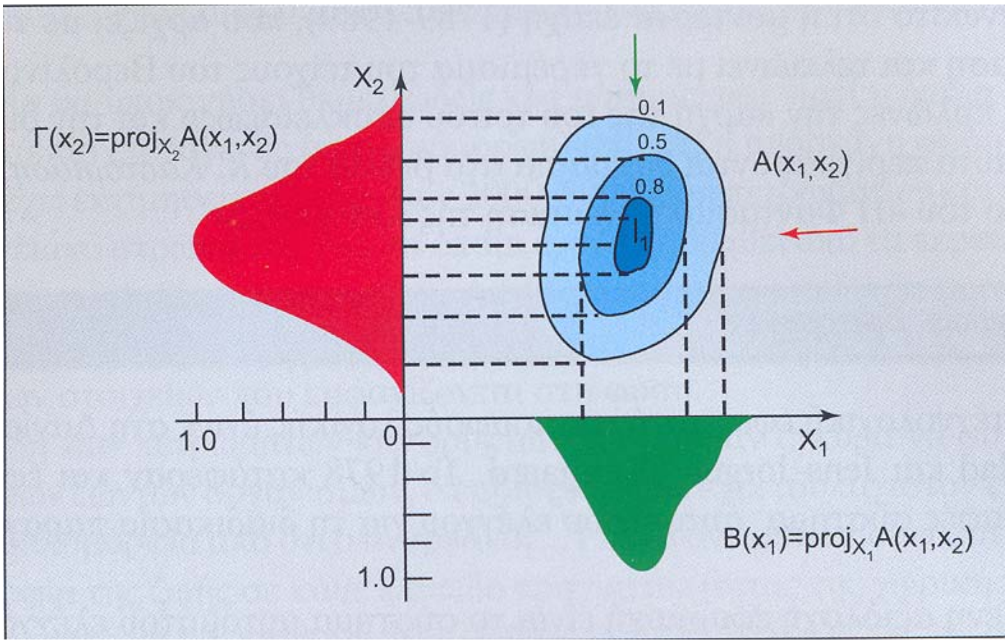
Στοιχεία Ασαφούς Συνολοθεωρίας-Ασαφούς Αριθμητικής-
Ασαφούς Γραμμικής Αλγεβρας,
Ασαφή Συστήματα Ελέγχου-Εφαρμογές Matlab

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ
(Θεσ/κη 2010, ISBN 978-960-418-218-3)

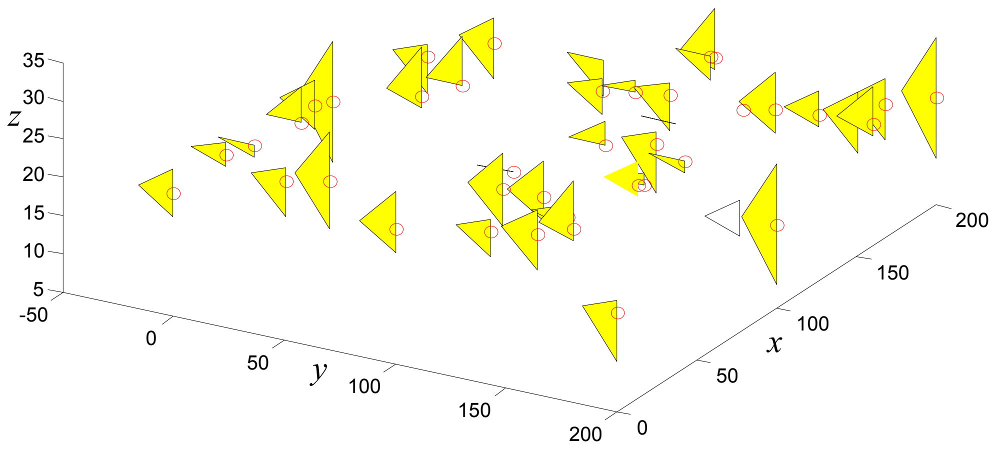
*"So far as laws of mathematics refer to reality, they are not certain.
And so far as they are certain, they do not refer to reality".*

Albert Einstein

"Geometrie und Erfahrung",
Ομιλία στην Πρωσική Ακαδημία (1921)



ΑΦΙΕΡΩΝΕΤΑΙ
στη σπουδάζουσα Νεολαία,
και στο γιό μου Θανάση.



Πιάνω δουλειά μόλις χαράξει η μέρα
και ξαποσταίνω μόλις βασιλέψει.
Για να πίνω νερό πηγάδι ανοίγω
κι οργώνω το χωράφι για να τρώγω.
Κι αψηφώ τον μεγάλο αυτοκράτορα.

(Κινέζικο δημώδες,
Μετάφραση Κώστα Βάρναλη).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</u>

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5</u>

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΣΑΦΟΥΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Βασικές Έννοιες Υποδομής)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΔΥΟ ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΛΟΓΙΚΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ ΤΗΣ ΔΙΤΙΜΗΣ - ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΑΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

► ***Το παράδοξο του Επιμενίδη***: "*Κρῆτες ἀεὶ ψεῦσται - Οι Κρητικοί λένε πάντα ψέματα*".

Ο Επιμενίδης λέει ότι οι Κρητικοί λένε πάντα ψέματα
Ο Επιμενίδης είναι Κρητικός
Άρα ο Επιμενίδης λέει ψέματα
Άρα οι Κρητικοί λένε την αλήθεια
Άρα και ο Επιμενίδης λέει την αλήθεια
Άρα οι Κρητικοί είναι ψεύτες, κ.ο.κ. (φαύλος κύκλος).

Δηλ. ο Κρητικός Επιμενίδης ψεύδεται όταν λέει ότι όλοι οι Κρητικοί είναι ψεύτες**;** Εάν ψεύδεται, λέει την αλήθεια. Αλλά εάν λέει την αλήθεια, ψεύδεται.

► ***Το παράδοξο του Κουρέα*** *(Bertrand Russel):*

Ένας κουρέας διαφημίζει,

"*Ξυρίζω όλους εκείνους που δεν ξυρίζονται μόνοι τους*".

Ποιος ξυρίζει τον κουρέα; Εάν ξυρίζεται μόνος του τότε σύμφωνα με τη διαφήμισή του δεν έπρεπε να το κάνει. Εάν δεν ξυρίζεται μόνος του, τότε σύμφωνα με τη διαφήμισή του έπρεπε να το κάνει.

Με μια πρώτη ματιά φαίνεται πως στις παραπάνω δύο προτάσεις έχουμε να κάνουμε όπως συνήθως με τις κλασικές λογικές προτάσεις των Μαθηματικών, που σήμερα τις χειριζόμαστε στην τεχνολογία με την άλγεβρα Boole.
Η άλγεβρα Boole ως γνωστό δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια μαθηματικοποίηση των κανόνων της δίτιμης λογικής, όπως αυτοί πρωτοδιατυπώθηκαν από τον Αριστοτέλη (γι' αυτό το λόγο ονομάζεται και *Αριστοτελική* λογική).
Με την άλγεβρα Boole μπορούμε να περιγράφουμε *τα λογικά κυκλώματα και κατ' επέκταση τα ψηφιακά κυκλώματα* που χρησιμοποιούνται στους υπολογιστές και στη σύγχρονη ψηφιακή τεχνολογία *(π.χ επεξεργαστές, μικροελεγκτές κ.λπ.)*. Σύμφωνα με την άλγεβρα Boole, μια λογική πρόταση μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής, (τίποτε άλλο). Έτσι η πρόταση "ο γάϊδαρος είναι θηλαστικό" είναι αληθής, ενώ η πρόταση " ο γάϊδαρος πετάει " είναι ψευδής. Οι προτάσεις επιδέχονται λογικές πράξεις μεταξύ τους, το αποτέλεσμα των οποίων είναι η παραγωγή άλλων λογικών προτάσεων, που μπορούν να είναι επίσης μόνον αληθείς ή ψευδείς (απ' όπου και η γνωστή μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής).

Όμως τα παραπάνω δύο ιστορικά λογικά παράδοξα (όπως βέβαια και άπειρα άλλα), ***δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν από τα κλασικά-παραδοσιακά μαθηματικά*** και την άλγεβρα Boole, και αυτό οφείλεται στην αδυναμία της δίτιμης λογικής να δεχτεί ότι μια πρόταση μπορεί να είναι και κάτι άλλο πέρα από το απόλυτο και στατικό δίλημμα «αληθής ή ψευδής».

Μια πρώτη προσέγγιση στο λογικό αυτό πρόβλημα είναι να επιχειρήσουμε να υπερβούμε την απολυτότητα και στατικότητα των παραδοσιακών μαθηματικών της δίτιμης λογικής και να δούμε την πραγματικότητα και τις έννοιες όχι στατικά, αλλά δυναμικά όπως πράγματι είναι στη ζωή μας από τη φύση τους.

Στην πραγματικότητα δηλ. τα περισσότερα αντικείμενα του κόσμου μας υπόκεινται συνεχώς σε διαρκή αλλαγή σε κάθε στιγμή. Και ενώ έχουν κάποια στιγμή μια Α μορφή, εμπεριέχουν ταυτόχρονα στο εσωτερικό τους το σπέρμα της μεταβολής τους, της μελλοντικής τους αλλαγής.

Ένα απλό παράδειγμα είναι η κίνηση ενός αντικειμένου στο χώρο. Σε μια τυχαία χρονική στιγμή το αντικείμενο κατέχει μια συγκεκριμένη θέση. Αυτό όμως δεν προσδιορίζει τον χαρακτήρα ενός αντικειμένου που βρίσκεται σε κίνηση, αλλά θα το προσδιόριζε μόνο αν το αντικείμενο ήταν στατικό, ακίνητο. Το κινητό όμως αλλάζει κάθε χρονική στιγμή θέση, και σε κάθε χρονική στιγμή κυριαρχείται από την τάση να αλλάζει την θέση του στο χώρο. Αυτό μπορεί να εκφραστεί με την πρόταση ***"το αντικείμενο Α κατέχει και παράλληλα δεν κατέχει μια δεδομένη θέση"***.

Ένα άλλο γνωστό παράδειγμα από την Κβαντική Φυσική είναι ότι τα στοιχειώδη υποατομικά "σωματίδια" συμπεριφέρονται άλλοτε σαν κλασικά σωματίδια και άλλοτε σαν συρμοί κυμάτων, ανάλογα με τις συνθήκες παρατήρησης. Με απλά λόγια ***"τα στοιχειώδη υποατομικά σωματίδια συμπεριφέρονται ταυτόχρονα και σαν υλικά σωμάτια αλλά και σαν ενεργειακά κύματα"***, δηλαδή τα στοιχειώδη σωματίδια είναι και δεν είναι ύλη και ενέργεια ταυτόχρονα.

Συνεπώς τα προαναφερόμενα δύο λογικά παράδοξα, είναι παράδοξα για τα γνωστά παραδοσιακά μαθηματικά και την απόλυτη «ασπρόμαυρη» δίτιμη-Αριστοτέλεια λογική, και όχι για μια άλλη πιο πλατιά λογική, όπως η πλειότιμη-Ασαφής Λογική που μπορεί να δέχεται προσεγγιστικές και υποκειμενικές έννοιες, όπως ακριβώς κάνει η φυσική γλώσσα, η κοινή λογική και η νοημοσύνη του ανθρώπου.

Η Ασαφής Λογική ξεκινά ακριβώς από το γεγονός ότι συνήθως στην πραγματικότητα δεν υπάρχει μόνο το «άσπρο ή μαύρο» όπως απαιτεί η δίτιμη λογική των κλασικών-παραδοσιακών μαθηματικών, αλλά συνήθως έχουμε διάφορες «αποχρώσεις του γκρι» όπως βέβαια και έγχρωμα φαινόμενα. Η ιδέα λοιπόν αυτή της Ασαφούς Λογικής (Zadeh, 1965) αποτέλεσε πραγματική επανάσταση στη θεωρία της λογικής και των μαθηματικών και κατ' επέκταση των σύγχρονων επιστημών και της τεχνολογίας, γιατί πράγματι υπερέβαινε τα εσκαμμένα και ξέφευγε από το μοντέλο που κυριαρχούσε εδώ και 2500 χρόνια, δηλαδή από το παραδοσιακό Αριστοτέλειο ασπρόμαυρο μοντέλο του «0-1», «αληθές-ψευδές».

Έτσι, ο Επιμενίδης μάλλον θεωρούσε ότι λένε ψέματα συνήθως οι άλλοι Κρητικοί εκτός από τον ίδιο, ενώ ο Κουρέας προφανώς εξαιρούσε από τη διαφήμιση τον εαυτό του.

Ο ***Αριστοτέλης*** (Στάγειρα, 382-322 π.Χ.) ήταν αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος (Περιπατητική Σχολή), μαθητής του Πλάτωνα και δάσκαλος του Μ. Αλέξανδρου. Υπήρξε σοφός μεγαλοφυής, δημιουργός της (δίτιμης) Λογικής, φυσιοδίφης, και ο σημαντικότερος από τους διαλεκτικούς της αρχαιότητας.

► Μια λογική πρόταση μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής, αποκλείοντας τρίτη λύση.

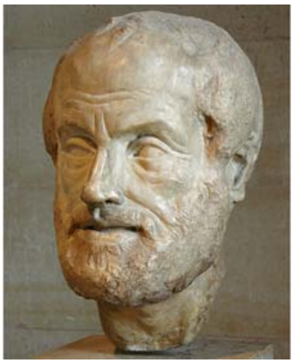
Αρχή της του Τρίτου Αποκλείσεως. *(Όργανον ή Λογική).*

► Πάντες ἄνθρωποι τοῦ εἰδέναι ὀρέγονται φύσει.

Όλοι οι άνθρωποι από τη φύση τους επιθυμούν την γνώση. (Μεταφυσικά - Βιβλίο Α).

► Φύσει μέν ἐστιν ἅνθρωπος ζῷον πολιτικόν.

Ο άνθρωπος είναι από τη φύση του κοινωνικό ον. (Πολιτικά Γ).



Προτομή του Αριστοτέλη
(Λούβρο-Παρίσι)

ΠΡΟΛΕΓΟΜΕΝΑ

Η εισαγωγή της Ασαφούς Λογικής έγινε από τον Περσικής καταγωγής, Αμερικανό Καθηγητή Lotfi Zadeh. Η σύλληψη της σχετικά απλής ιδέας, έγινε ένα βράδυ του Ιούλη του 1964 στην Νέα Υόρκη, και δημοσιεύθηκε στη διάσημη πια εργασία του το 1965 (Βλ. Fuzzy Sets. ***Information and Control***, **8 (**1965) 338 - 353.
Δες επίσης και τα: Woehr, Jack: Lotfi visions, parts 1,2; An interview with Lotfi Zadeh, the father of fuzzy logic. ***Dr. Dobb's Journal*** #19, no 7,8 (1994), 44,52.).

Ο Zadeh γεννήθηκε το 1921 στο Baku του τότε Σοβιετικού Αζερμπαϊτζάν. Το 1931 η οικογένειά του μετακόμισε στην Τεχεράνη και το 1943 πτυχιούχος μηχανικός ήδη στις ΗΠΑ. Πήρε το Masters degree από το MIT το 1944 και το διδακτορικό του από το Columbia το 1949.

Για μια εκλαϊκευτική εισαγωγή στην ασαφή λογική, δείτε τα ακόλουθα βιβλία:
- D. McHeil and P. Freiberger: ***Fuzzy Logic***. Simon and Shuster, 1993
- B. Kosko: ***Fuzzy Thinking***. Flamingo, 1993 (Μετάφραση: Furry Logic. Η νέα επιστήμη, από τις Εκδόσεις «Λέξημα» Αθήνα 1993).

Η ασαφής λογική είναι η προσπάθεια των επιστημόνων και κυρίως αυτών που ασχολούνται με την "τεχνητή νοημοσύνη" να μελετήσουν και να κατανοήσουν τη δομή της φυσικής γλώσσας του ανθρώπου.
Γενικότερα η προσπάθεια των επιστημόνων, στην περίοδο της «Κοινωνίας της Πληροφορίας» έχει εστιασθεί στην κατανόηση του ίδιου του ανθρώπου και κύρια των μηχανισμών πάνω στους οποίους στηρίζεται η ανθρώπινη ευφυΐα. Έτσι η σημαντικότερη συνέπεια της μετάβασης στην κοινωνία της πληροφορίας, είναι ***η μετατόπιση του κέντρου του ενδιαφέροντος από τα μαθηματικά της φύσης στα μαθηματικά του ανθρώπου*****!**
Πώς βλέπει, πώς ακούει, πώς αντιλαμβάνεται τα χρώματα, ποια είναι η δομή και η λειτουργία (νευροφυσιολογία) του εγκεφάλου, πώς λειτουργούν τα νευρωνικά του δίκτυα κ.λπ. Τις τελευταίες δεκαετίες η σχετική παραγωγή γνώσης είναι πολύ μεγαλύτερη από όλα τα προηγούμενα χρόνια!

Ας δούμε όμως ποια είναι τα βασικά χαρακτηριστικά αυτής της μετατόπισης. Αυτά τα χαρακτηριστικά περιγράφονται με θαυμάσιο τρόπο στο άρθρο του J.E. Cohen: «Τα Μαθηματικά είναι το επόμενο μικροσκόπιο της Βιολογίας, μόνο που είναι καλύτερο· η Βιολογία είναι η επόμενη Φυσική των Μαθηματικών, μόνο που είναι καλύτερη.» (Mathematics is biology's next microscope, only better; biology is mathematics' next physics, only better, *PLOS Biology* 2 (2004) No.12.)

Στο πιο πάνω άρθρο, διαθέσιμο από την διεύθυνση
http://www.maa.org/mtc/Cohen-PloS2004.pdf, βρίσκουμε:

«Η Βιολογία θα υποκινήσει θεμελιωδώς νέα μαθηματικά γιατί η έμβια φύση είναι ποιοτικά πιο ετερογενής (ανομοιόμορφη) από ότι η ανόργανη φύση. Για παράδειγμα, έχει εκτιμηθεί ότι υπάρχουν 2000-5000 είδη πετρωμάτων και ορυκτών στο επιφανειακό στρώμα της γης, τα οποία έχουν παραχθεί από τα περίπου εκατό στοιχεία που εμφανίζονται στη φύση. Αντίθετα υπάρχουν πιθανώς μεταξύ 3 και 100 εκατομμυρίων βιολογικά είδη στη γη που έχουν παραχθεί από ένα μικρό ποσοστό των στοιχείων που εμφανίζονται στη φύση.

Αν τα είδη των πετρωμάτων και ορυκτών μπορούσαν έγκυρα να συγκριθούν με τα είδη των ζώντων οργανισμών, ο έμβιος κόσμος έχει τουλάχιστον εκατονταπλάσια ποικιλομορφία από ότι ο ανόργανος.... Για να αντιμετωπισθεί αυτή η υπερποικιλομορφία της ζωής σε κάθε επίπεδο πραγματικότητας της χωρικής και χρονικής οργάνωσης θα χρειασθούν θεμελιώδεις εννοιολογικές εξελίξεις στα μαθηματικά».

Η ανθρώπινη ευφυΐα είναι μια σύνθεση συστημάτων όπως:

- Η φυσική γλώσσα που προσεγγίζεται με την ασαφή λογική.
- Τα νευρωνικά δίκτυα που τα προσεγγίζουν με τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα,
- και οι γενετικοί αλγόριθμοι που τους εφαρμόζουν για την εύρεση λύσεων εξισώσεων κ.λπ.

Η δίτιμη κλασική λογική είναι και αυτή μια μίμηση των ***οριστικών χαρακτηριστικών*** της φυσικής γλώσσας, δηλαδή των χαρακτηριστικών που δεν περιέχουν ασάφεια, αμφισημία και αοριστία.
Με την ασαφή λογική θα θέλαμε ξεκινώντας από τη δίτιμη κλασική λογική να την επεκτείνουμε εισάγοντας, ασάφεια, αοριστία κ.λπ., έτσι ώστε το τελικό αποτέλεσμα να προσεγγίζει την εκφραστική δύναμη και απλότητα της φυσικής γλώσσας, αλλά ταυτόχρονα να περισώζει όσον το δυνατόν περισσότερο τη μαθηματική δομή της κλασικής λογικής.
Μια τέτοια λογική είναι εξ ορισμού πλειότιμη. Εκτός δηλαδή των τιμών αληθείας 0 και 1 έχουμε ως τιμή αλήθειας και κάθε αριθμό στο κλειστό διάστημα [0,1]. Οι βασικές αλλαγές λοιπόν που θα πρέπει να γίνουν στα μαθηματικά είναι *η θεμελιακή ενσωμάτωση* του 'μεταβαλλόμενου', του 'ασαφούς' και του 'αόριστου'. Τα μαθηματικά αυτά που ενσωματώνουν το 'μεταβαλλόμενο' και το δυϊκό του την 'ασάφεια' και την 'αοριστία', τα ονομάζω μη-Καντοριανά μαθηματικά. Αυτά εκτός της Ασαφούς και των Πλειότιμων Λογικών, περιλαμβάνουν ασφαλώς και τις Κατηγορίες και τους Τόπους, στα οποία η λογική δεν είναι κλασική αλλά ιντουϊσιονιστική.

Είναι γνωστό ότι η μοντέρνα εποχή (1789-1989), που αρχίζει με τη Γαλλική Επανάσταση και τελειώνει με το γκρέμισμα του τείχους του Βερολίνου, είχε ως βασικούς πυλώνες την «αρχή της του τρίτου αποκλείσεως» και την δίτιμη λογική. Όλα αυτά περιγράφονται θαυμάσια στα βιβλία του *Κ. Καστοριάδη*, και ιδίως στο βιβλίο του «Η Φαντασιακή Θέσμιση της Κοινωνίας».

Τεχνολογικές Εφαρμογές.

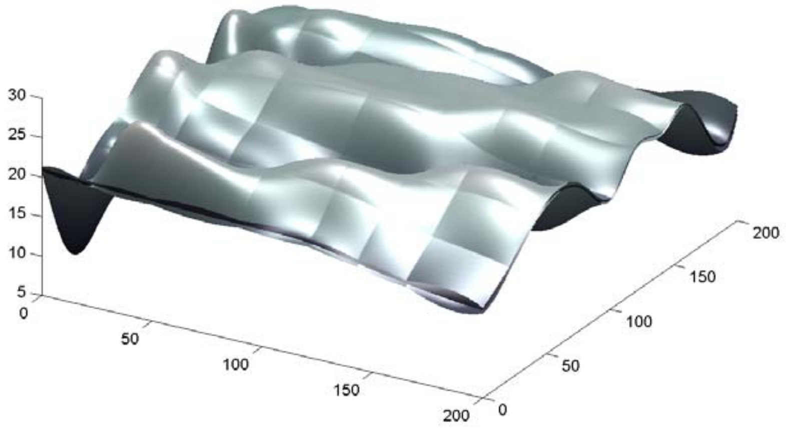
Η πρώτη τεχνολογική εφαρμογή της ασαφούς λογικής έγινε στη Δανία από τους P. Hoenblad και Jens-Jorgen Ostergaard. Το 1978 κατάφεραν και έφτιαξαν το πρώτο ασαφές σύστημα αυτόματου ελέγχου για τη διαδικασία παραγωγής τσιμέντου.
Η επόμενη αξιόλογη εφαρμογή είναι το σύστημα αυτομάτου ελέγχου του μετρό της Ιαπωνικής πόλης Sendai των Miyamoto & Yasonubu. Το μετρό αυτό λειτούργησε γύρω στο 1978, και είναι το πιο απαλό και ήπιο στην κίνηση μετρό του κόσμου! Επί πλέον εξοικονομεί ενέργεια και μειώνει το κόστος κατά 10%.
Μετά από αυτές τις αρχικές εφαρμογές, έχει κυριολεκτικά πλημμυρίσει η αγορά με κυρίως Ιαπωνικές οικιακές συσκευές που ενσωματώνουν ασαφείς ελεγκτές, (πλυντήρια, βιντεοκάμερες, κλιματιστικά, κιβώτια ταχυτήτων κ.λπ.).

Για το Βιβλίο.

Το ανά χείρας βιβλίο του Δρα Καθηγητή ΤΕΙ *Γιάννη Θεοδώρου*, αποτελεί μια εξαιρετική εισαγωγή στο αντικείμενο και καλύπτει ένα κενό στην Ελληνική βιβλιογραφία.
Ο συγγραφέας έχει πετύχει μια θαυμαστή ισορροπία μεταξύ θεωρίας και εφαρμογών που κάνει το βιβλίο κατάλληλο για πολλών ειδών σχετικά μαθήματα.

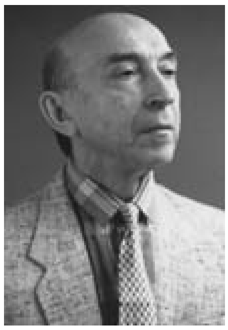
Αξίζουν θερμά συγχαρητήρια στον συγγραφέα για μια πολύ χρήσιμη εισαγωγή στο αντικείμενο της Ασαφούς Λογικής και των Ασαφών Συνόλων.

Καθηγητής Κώστας Αθ. Δρόσος
(Τμήμα Μαθηματικών-Πανεπιστημίου Πατρών)
Πάτρα, Αύγουστος 2009



- *Everything is a matter of degree.* (The Fuzzy Principle).

- *As complexity rises, precise statements lose meaning and meaningful statements lose precision.*



Lotfi A. Zadeh
Περσο-Αμερικανός Μηχανικός, (1921-)
Θεμελιωτής της Ασαφούς Λογικής

<u>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</u>

Η Ασαφής Λογική (Fuzzy Logic) είναι μια επέκταση της κλασικής-παραδοσιακής δίτιμης Αριστοτέλειας λογικής, που μας εφοδιάζει με έναν αποτελεσματικό μαθηματικό σκελετό, για την έκφραση γλωσσικών εννοιών και για την παράσταση γνώσεων και πληροφοριών σε περιβάλλον ασάφειας και αβεβαιότητας. Πιο απλά, κατά μια έννοια η «Θεωρία των Ασαφών Συνόλων» μπορεί να θεωρηθεί ότι στοχεύει να μαθηματικοποιήσει δηλ. να μοντελοποιήσει τη φυσική-καθομιλουμένη γλώσσα και την κοινή λογική.

Η ***κλασική-παραδοσιακή δίτιμη Αριστοτέλεια λογική*** είναι γνωστή από την Αρχαιότητα (500 π.Χ.), θεμελιώθηκε από τους αρχαίους Έλληνες φιλόσοφους (***Αριστοτέλης, Πυθαγόρας, Στωικοί-Χρύσιππος***, κ.λπ.) και αποτελεί τη βάση της λεγόμενης δυτικής σκέψης και του δυτικού πολιτισμού.
Σύμφωνα με την κλασική δίτιμη λογική μια λογική πρόταση μπορεί να πάρει μόνον δύο τιμές, δηλ. μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής (1 ή 0), αποκλείοντας τρίτη λύση (Αρχή της Απόκλεισης του Τρίτου). Έτσι αν μια λογική πρόταση δεν είναι αληθής (άσπρη-1) τότε θα είναι αναγκαία ψευδής (μαύρη-0), ενώ αν δεν είναι ψευδής (μαύρη) τότε θα είναι αναγκαία αληθής (άσπρη).

Η δίτιμη Αριστοτέλεια λογική επικράτησε πλήρως από τον $10^{ο}$ αιώνα στον δυτικό πολιτισμό, για δύο κυρίως λόγους: πρώτον γιατί απλουστεύει κατά πολύ τη συλλογιστική των προβλημάτων, και δεύτερον γιατί αποδίδει απόλυτη «βεβαιότητα» στην απόδειξη και αποδοχή της «αλήθειας».

Όμως αυτή η απόλυτη «βεβαιότητα» της δίτιμης λογικής καθώς και οι φυσικές ατέλειες της «ασπρόμαυρης» συλλογιστικής της, αποδείχθηκαν «ανθρωπο-λογικά» ανεπαρκείς για την ερμηνεία τόσο της φυσικής γλώσσας όσο και της συνήθως «έγχρωμης» και αβέβαιης πραγματικότητας που μας περιβάλλει.
Έτσι, τα αίτια που έκαναν αναπόφευκτη την επέκταση της δίτιμης λογικής και οδήγησαν στη δημιουργία πλειό-τιμων λογικών όπως η Ασαφής Λογική, ήταν κυρίως η ανάγκη μοντελοποίησης της φιλοσοφίας της φυσικής-καθομιλουμένης γλώσσας και της φυσικής ασάφειας που διέπει την ανθρώπινη νοημοσύνη-συμπεριφορά, καθώς και η αναγκαιότητα για μια πιο ρεαλιστική θεώρηση της έννοιας της αβεβαιότητας.

Από την αρχαιότητα ακόμη ήταν γνωστές οι ατέλειες της Δίτιμης Λογικής (όπως διακωμωδούσαν οι Σοφιστές ή τα ιστορικά λογικά παράδοξα π.χ. του ***Ζήνωνα*** ή ***Επιμενίδη***, «Ένας Κρητικός λέει ότι όλοι οι Κρητικοί λένε ψέματα, άρα τότε όλοι οι Κρητικοί θα λένε αλήθεια, οπότε και αυτός ως Κρητικός θα λέει αλήθεια ότι λένε ψέματα, κ.λπ.»), αλλά και οι σύγχρονες επιστημονικές θεωρήσεις όπως η Αρχή της Απροσδιοριστίας του ***Werner Heisenberg*** είτε η Θεωρία Σχετικότητας του ***Albert Einstein***, οδήγησαν αναπόφευκτα στην ανάπτυξη της *Πλειότιμης (δηλ. Πολύ-τιμης) Λογικής* στις δεκαετίες του 1920-1930 και τελικά στη δημιουργία της σύγχρονης *Ασαφούς Λογικής*.

Πιο συγκεκριμένα, από τις αρχές του 20ου αιώνα ο Άγγλος φιλόσοφος και μαθηματικός ***Bertrand Russel*** πρόβαλλε τις αντιφάσεις της Δίτιμης Λογικής (που από τον 19ο αιώνα είχε ήδη θεμελιωθεί ως η απόλυτη κλασική Συνολοθεωρία από τον Γερμανό μαθηματικό ***Georg Cantor***), αλλά και τις λογικές αδυναμίες της για την έκφραση της ασάφειας της φυσικής γλώσσας και της ανθρώπινης νοημοσύνης.
Λίγο μετά το 1920, πρώτος ο Πολωνός μαθηματικός ***Jan Lukasiewiscz*** ανέπτυξε ένα *μη-δίτιμο* αλλά *τρίτιμο* λογικό σύστημα, δηλ. μια τρίτιμη άλγεβρα με πεδίο αληθοτιμών $\{0,\frac{1}{2},1\}$, που μπορεί δηλ. να εκφράζει τρίτιμες λογικές καταστάσεις όπως π.χ. ένα ποτήρι άδειο (0), μισογεμάτο ή μισοάδειο ($\frac{1}{2}$), και γεμάτο (1).
Λίγο αργότερα (1937) ο Αμερικανός φιλόσοφος και κβαντικός φυσικός ***Max Black*** συμπλήρωσε αυτή τη θεωρία και έθεσε τις φιλοσοφικές βάσεις για τα ασαφή σύνολα.

Τελικά το 1965, ο ***Lotfi Zadeh*** (Lotfali Askar Zadeh-1921, Αμερικανός μηχανικός, ρωσοπερσικής καταγωγής, καθηγητής του παν/μίου Berkeley της Καλιφόρνιας), δημοσίευσε την εμπνευσμένη εργασία του με τίτλο *"Fuzzy Sets-Ασαφή Σύνολα"*, όπου εισήγαγε για πρώτη φορά την έννοια του Ασαφούς Συνόλου και τον όρο *fuzzy* στη διεθνή βιβλιογραφία. Αν και ένας παρόμοιος όρος (*ensemble flou*) προϋπήρχε ήδη στη Γαλλία (*K. Menger-1951*), όμως ουσιαστικά ήταν ο Zadeh που έθεσε τα θεμέλια της Ασαφούς Συνολοθεωρίας-Ασαφούς Λογικής, ανοίγοντας παράλληλα το δρόμο και για τις πρακτικές εφαρμογές της (αρχικά στη ψυχολογία, κοινωνιολογία, φιλοσοφία, κ.λπ.).

Μετά την αρχική δυσπιστία και τις πρώτες φυσιολογικές αμφισβητήσεις της νέας Θεωρίας, σύντομα ακολούθησαν και οι τεχνολογικές εφαρμογές της Ασαφούς Λογικής, κυρίως στα δυναμικά μη-γραμμικά συστήματα ελέγχου (non-linear control systems), όπου συνήθως τα συμβατικά μαθηματικά μοντέλα δεν ισχύουν πια.
Τα συστήματα ελέγχου που βασίζονται στη *Fuzzy Logic (Fuzzy Control Systems-Ασαφή Συστήματα Ελέγχου)*, συνήθως καταφέρνουν να εξομοιώσουν καλύτερα την ανθρώπινη συμπεριφορά-νοημοσύνη καθώς και τις φυσικές γλωσσικές έννοιες, και έτσι συχνά αναφέρονται ως ένα είδος συστημάτων με τεχνητή νοημοσύνη.

Ένας από τους πρώτους που χρησιμοποίησε την Ασαφή Λογική για την κατασκευή ενός Ασαφούς Συστήματος Ελέγχου στη λειτουργία μιας ατμομηχανής, ήταν ο Βρετανός μηχανικός *Ebrahim Mamdani* κατά τη δεκαετία του 1970. Ακολούθησαν γρήγορα πολυάριθμες θεωρητικές θεμελιώσεις και τεχνολογικές επεκτάσεις της Ασαφούς Λογικής, καθώς και εκατοντάδες αξιόλογες ερευνητικές εργασίες και συγγράμματα, μεταξύ των οποίων αναφέρουμε ενδεικτικά: *Kaufmann A. (1973), Negoita-Ralescu (1975), Sugeno M. (1977), Gupta M.M. (1977), Dubois-Prade (1980), Mizumoto M. & Yamakawa T. (1988), Zimmerman H.J. (1991), Yager R. & Zadeh L. (1993), Sakawa Masatoshi (1993), Pedrycz W. (1996), Kosko B. (1997), Nguyen-Walker (2000), Klir G. (2006).*

Σήμερα είναι πολυάριθμες σε όλο τον κόσμο οι τεχνολογικές και θεωρητικές εφαρμογές της Ασαφούς Λογικής, ενώ πολλές απ' αυτές μπορούν να χαρακτηριστούν πραγματικά ως τεχνολογικά και επιστημονικά «επαναστατικές».
Αναφέρουμε ενδεικτικά την αυτόματη λειτουργία μέσω Ασαφούς Συστήματος Ελέγχου: του μετρό της γιαπωνέζικης πόλης Sendai (από το 1987), μη-επανδρωμένων οχημάτων και αεροσκαφών, τσιμεντοβιομηχανιών, κλιματιστικών, ρομπότ, πλυντηρίων, ιατρικής διάγνωσης και αναισθησίας, αυτόματων καμερών, κ.λπ.,
ενώ δεν υπάρχει ίσως επιστημονικός κλάδος σήμερα που να μην επεκτείνεται ραγδαία σε έννοιες και εφαρμογές της Ασαφούς Λογικής, όπως: Μαθηματικά (ασαφής Τοπολογία, ασαφής Γραμμική Άλγεβρα, ασαφείς Πιθανότητες), Οικονομία, Στατιστική, Φιλοσοφία, Σεισμολογία, Ιατρική, Ρομποτική, Βιολογία, Ψυχολογία, Διαστημική, Κοινωνιολογία, Πυρηνική, Οικολογία, Μετεωρολογία, Γεωλογία, Γενετική, κ.λπ.,
(βλ. Klir-Yuan [12](a), Bibliographical Index, σελ. 548).

Δομή και στόχοι του βιβλίου

Το βιβλίο αυτό χωρίζεται σε εφτά Κεφάλαια, εκ των οποίων το τελευταίο (§7) αναφέρεται σε προαπαιτούμενες βασικές γνώσεις υποδομής (όπως στοιχεία συνολοθεωρίας, βασικές αλγεβρικές δομές και άλγεβρες Boole).

Ουσιαστικά το βιβλίο χωρίζεται *σε τρεις ενότητες*.

Στην πρώτη ενότητα ανήκουν τα Κεφάλαια §1, §2, §3 και §4, όπου εκτίθενται οι βασικές έννοιες και υπολογιστικές μεθοδολογίες της Ασαφούς Λογικής και συγκεκριμένα:

- Στο Κεφάλαιο §1, εισάγεται η θεμελιώδης έννοια του Ασαφούς Συνόλου και των βασικών χαρακτηριστικών του, εκτίθενται οι βασικές Αρχές και η ευρύτερη φιλοσοφία της Ασαφούς Λογικής έναντι της Δίτιμης Λογικής, θεμελιώνεται η έννοια του Ασαφούς Δυναμοσυνόλου και αναπτύσσονται οι στοιχειώδεις Ασαφείς Συνολοθεωρητικές Πράξεις και οι βασικές ιδιότητες αυτών.
- Στο Κεφάλαιο §2, δίνονται οι αλγεβρικές σχέσεις και ιδιότητες των Ασαφών Συνόλων και των α-διατομών τους, αναπτύσσονται οι Ασαφείς Σχέσεις με ιδιαίτερη έμφαση στην Προβολή ενός Ασαφούς Συνόλου, ενώ αναλύεται η αλγεβρική δομή και οι ιδιότητες του Ασαφούς Δυναμοσυνόλου.
- Στο Κεφάλαιο §3, ορίζεται η θεμελιώδης έννοια του Ασαφούς Αριθμού, καθορίζονται οι βασικές Ασαφείς Αριθμητικές Πράξεις και οι ιδιότητές τους, ενώ αναπτύσσεται εκτενώς και αναλύεται μέσω πληθώρας παραδειγμάτων, η απαραίτητη για τις εφαρμογές υπολογιστική διαδικασία της Ασαφούς Αριθμητικής (η οποία βασίζεται ουσιαστικά στη δομή και τις αριθμητικές πράξεις των κλασικών Διαστημάτων).

- Στο Κεφάλαιο §4, γίνεται μια εισαγωγή στη Γεωμετρία της Ασαφούς Λογικής. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται συνοπτικά μια γενική γεωμετρική παράσταση της Ασαφούς Συνολοθεωρίας, δίνεται η γεωμετρική έκφραση του Ασαφούς Συνόλου μέσω του Ασαφούς Υπερκύβου (Kosko-1990), θεμελιώνεται η έννοια της Ασαφούς Εντροπίας ενός Ασαφούς Συνόλου, ορίζεται η έννοια της Απόστασης μεταξύ Ασαφών Συνόλων, κ.λπ.

Η δεύτερη Ενότητα του βιβλίου απαρτίζεται από το ογκωδέστερο σχετικά Κεφάλαιο §5, το οποίο αφιερώνεται αποκλειστικά στις πρακτικές και Τεχνολογικές Εφαρμογές της Ασαφούς Λογικής.
Σ' αυτή την ενότητα παρουσιάζονται κυρίως οι δράσεις του Ασαφούς Ελέγχου, όπως αυτός πραγματοποιείται μέσω των Ασαφών Συστημάτων κατά τη λειτουργία τους στα σύγχρονα εμπορικά ή άλλα καταναλωτικά προϊόντα.
Παρουσιάζονται επίσης εκτενώς, ο σχεδιασμός, η δημιουργία και η επεξεργασία των Ασαφών Συστημάτων (ως μια επέκταση των κλασικών συστημάτων ελέγχου), καθώς και η εκτέλεση διάφορων ασαφών πράξεων και διαδικασιών (όπως η αποασαφοποίηση), με χρήση του δυναμικού υπολογιστικού πακέτου MATLAB και των σχετικών υποπρογραμμάτων του, FUZZY LOGIC TOOLBOX και FUZZY SYSTEMS TOOLBOX .
Επιπλέον στο Κεφάλαιο §5 σκιαγραφούνται οι επεκτάσεις και οι σχέσεις της Ασαφούς Λογικής με τα Ευφυή ή Νευρωνικά δίκτυα, την Τεχνητή Νοημοσύνη και τη Θεωρία του Χάους, τις Ασαφείς Πιθανότητες και τους Ασαφείς Μετρικούς Χώρους, τη Θεωρία Δυνατοτήτων, κ.λπ.

Η τρίτη Ενότητα αποτελείται από το (ειδικότερο) Κεφάλαιο §6, όπου γίνεται εισαγωγή στην επέκταση βασικών εννοιών της Γραμμικής Άλγεβρας στην Ασαφή Λογική. Πιο συγκεκριμένα το §6 αναφέρεται αποκλειστικά σε θεμελιώδη στοιχεία και έννοιες της Ασαφούς Γραμμικής Άλγεβρας, όπως: Ασαφείς Διανυσματικοί Χώροι, Ασαφής Γραμμική Ανεξαρτησία, Ασαφείς Γραμμικοί Μετασχηματισμοί, Ασαφείς Πίνακες, Ασαφείς Ιδιοτιμές - Ασαφή Ιδιοδιανύσματα, κ.λπ.

Βασικός σκοπός του παρόντος βιβλίου είναι η εισαγωγή του Έλληνα μελετητή (σπουδαστή, εκπαιδευτικού, μηχανικού, μαθηματικού, και γενικότερα κάθε ενδιαφερόμενου επιστήμονα-ερευνητή), στον σύγχρονο τομέα της Ασαφούς Λογικής και των πολυδιάστατων (κυρίως τεχνολογικών) εφαρμογών της.
Το βιβλίο στοχεύει να φωτίσει ένα νέο δρόμο και να καλύψει ένα κενό που πράγματι υπάρχει σήμερα στην ελληνική επιστημονική βιβλιογραφία, γύρω από την ραγδαίως και παγκοσμίως αναπτυσσόμενη Ασαφή Λογική.

Τέλος έγινε προσπάθεια να αποδοθεί αρμονικά η σύνδεση Θεωρίας και Πράξης της Ασαφούς Λογικής, καθώς και να εισαχθούν οι νέες ασαφείς έννοιες, όχι μόνον με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη αυτάρκεια δηλ. με όσο το δυνατόν λιγότερες προαπαιτούμενες γνώσεις, αλλά και να αποδοθούν σε ένα κοινά αποδεκτό διδακτικό επίπεδο που να ανταποκρίνεται σε μια σύγχρονη ενιαία Ανώτατη Πανεπιστημιακή και Τεχνολογική Εκπαίδευση της χώρας μας.

Ευχαριστίες

Με δεδομένο «ότι κανένα βιβλίο δεν έλαβε ποτέ την τελική του μορφή-*Honoré De Balzac*», θα ήθελα να εκφράσω και από αυτή εδώ τη θέση της θερμές μου ευχαριστίες στους Καθηγητές του Πανεπιστημίου Πατρών ***Κώστα Δρόσο*** και ***Φίλιππο Αλεβίζο***, χωρίς τους οποίους μάλλον δεν θα έβλεπε το φως της δημοσιότητας αυτό το βιβλίο.

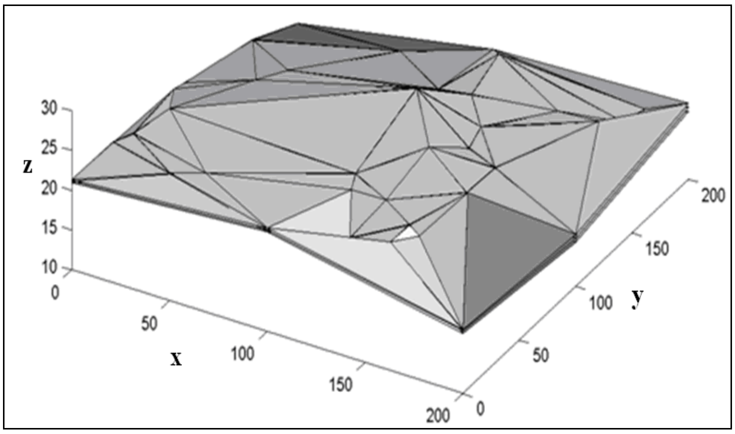
Ευχαριστίες επίσης οφείλω για τη γενικότερη συνεισφορά τους στους Πανεπιστημιακούς, *Ευτύχη Παπαδοπετράκη, Παναγή Καραζέρη, Μιχάλη Βραχάτη, Φρόσω Μακρή, Τάσο Πατρώνη, Δημήτρη Ιωαννίδη, Παπαντωνίου Βασίλη και Γιάννα Μαμωνά.*

Με διάφορους επίσης τρόπους συνέδραμαν στην ολοκλήρωση αυτού του βιβλίου, οι Ηλεκτρονικοί *Δημήτρης Κανούτος* και *Jacques Jardel*,
οι συνάδελφοι Φυσικομαθηματικοί *Παναγιώτης Κικίλιας, Αρης Σισούρας, Γιώργος Τζάθας, Βασίλης Σαφαρής, Στράτος Φαναράς, Παναγιώτης Τσιτσιπής, Σταύρος Σαραντάκος, Αριστείδης Κεχρινιώτης, Χρήστος Τσώνος και Μιχάλης Μπέλος*, καθώς και η συνάδελφος της Αγγλικής *Δήμητρα Γιαννοπούλου-Πρασσά*,
αρκετοί σπουδαστές (με τις αμφισβητήσεις, τις απορίες και τις πτυχιακές τους εργασίες),
όλοι σχεδόν οι συνάδελφοι Καθηγητές του *Τμήματος Ηλεκτρονικής του ΤΕΙ Λαμίας*, όπως και οι συνάδελφοι Μηχανικοί *Θεόδωρος Λατσός* και *Πέτρος Λάμψας*,
και βέβαια η σύζυγός μου Φιλόλογος *Βασιλική Πολυμέρου.*

Όλους αυτούς και από τη θέση αυτή, θερμά τους ευχαριστώ.

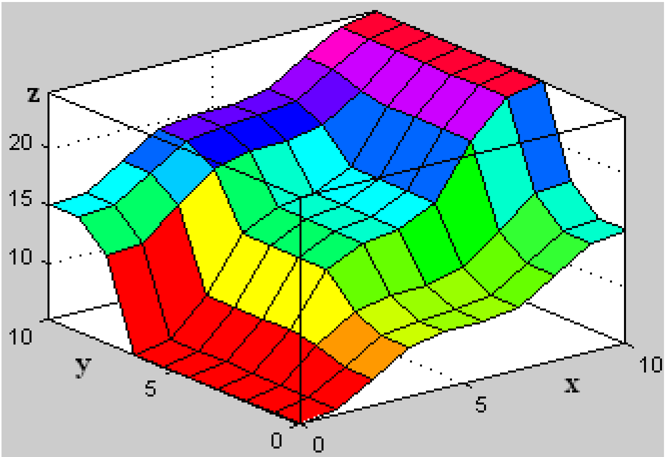
Τέλος ο συγγραφέας του παρόντος βιβλίου, ευπρόσδεκτα θα υποδεχόταν τις όποιες διορθώσεις, ή βελτιωτικές παρατηρήσεις, αλλά και υποδείξεις, σχόλια ή και επικρίσεις, από όποιον αναγνώστη θα το επιθυμούσε, στην ηλεκτρονική διεύθυνση: **teo@teilam.gr** .
Εκ των προτέρων, και αυτούς επίσης τους ευχαριστώ για την αναντικατάστατη συμβολή τους.

Γιάννης Αθαν. Θεοδώρου
Λαμία-Αθήνα, Δεκέμβρης 2009

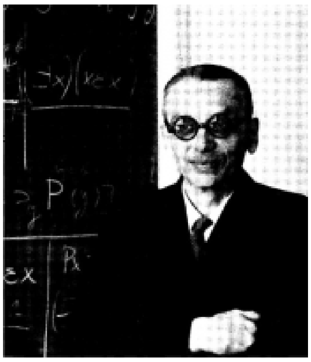


All traditional logic habitually assumes that precise symbols are being employed. It is therefore not applicable to this terrestrial life but only to an imagined celestial existence.

Bertrand Russell
Βρετανός Φιλόσοφος-Μαθηματικός
και Νομπελίστας (1872-1970)



The physical laws, in their observable consequences, have a finite limit of precision.



Kurt Gödel
Μαθηματικός-Λογικολόγος (1906-1978)
(Θεμελιωτής του Θεωρήματος της μη-Πληρότητας των Μαθηματικών, 1928)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στην Ασαφή Λογική

1. Γενικά περί Ασαφούς Λογικής και Ασαφών Συνόλων

1.1 Κλασικό και Ασαφές Σύνολο

Η Ασαφής Λογική είναι μια *πλειότιμη* επέκταση της κλασικής-παραδοσιακής Αριστοτέλειας *δίτιμης* λογικής, που μας εφοδιάζει με έναν αποτελεσματικό εννοιολογικό σκελετό, για την έκφραση λογικών-γλωσσικών εννοιών και για την αναπαράσταση γνώσης και πληροφοριών σε περιβάλλον αβεβαιότητας και ασάφειας.

Η Ασαφής Λογική[1] βασίζεται στην επέκταση της έννοιας του κλασικού συνόλου που ορίζεται στο δί-τιμο σύνολο $\{0,1\}$, στη γενικευμένη έννοια του ασαφούς συνόλου που ορίζεται στο πλειό-τιμο κλειστό διάστημα $[0,1]$.
Δηλ. η Ασαφής Συνολοθεωρία στηρίζεται στη γενίκευση της γνωστής κλασικής έννοιας της χαρακτηριστικής (ή δείκτριας) συνάρτησης $I_A(x)$ ενός δίτιμου συνόλου A (ως προς σύνολο αναφοράς X), όπου η σχέση του «*ανήκειν*» ($\in$) γενικεύεται έτσι, ώστε αντί το x να παίρνει μόνον δύο τιμές 0 και 1, να παίρνει άπειρες τιμές στο κλειστό διάστημα $[0,1]$.

Πιο αναλυτικά:

Αρχικός σκοπός του γνωστού κλασικού συνόλου A είναι να μοντελοποιήσει μαθηματικά, δηλ. να αναπαραστήσει τυπολογικά, κάποια λογική έννοια.
π.χ. η έννοια «οι ακέραιοι αριθμοί που είναι μεταξύ 2 και 6», μπορεί να παρασταθεί με το σύνολο: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < x < 6\} = \{3,4,5\}$, όπου $\mathbb{Z}$ συμβολίζει το σύνολο των ακεραίων.
Έτσι πρώτα χρειαζόμαστε ένα *σύνολο αναφοράς (ή σύμπαν ή βασικό σύνολο)*, που περιέχει όλα τα στοιχεία τα σχετικά με την έννοια που θέλουμε να εκπροσωπήσουμε μέσω του συνόλου A, (όπως στο ανωτέρω παράδειγμα όπου το σύνολο αναφοράς είναι το $\mathbb{Z}$).

---

(1)Ο όρος "Ασαφής Λογική" διακρίνεται σημασιολογικά κατά την ευρεία και τη στενή έννοια (βλ. P. Hajek, *"The Metamathematics of Fuzzy Logic"*, Kluwer 1998). Κατά την ευρεία έννοια συνήθως εννοούμε τη «Θεωρία των Ασαφών Συνόλων», που επιχειρεί να εξομοιώσει τη φυσική-καθομιλουμένη γλώσσα. Ενώ κατά τη στενή έννοια η «Ασαφής Λογική» μπορεί να θεωρηθεί απλά ως μια «λογική», δηλαδή υπό τη στενή έννοια είναι πράγματι μια πλειότιμη (πολύ-τιμη) γενίκευση της κλασικής δίτιμης λογικής.

Είναι γνωστό επίσης, ότι γενικά ένα κλασικό (ή σύνηθες) σύνολο A ως προς σύνολο αναφοράς ή σύμπαν X, μπορεί να παρασταθεί ισοδύναμα μέσω της *χαρακτηριστικής (ή δείκτριας) συνάρτησής του*,

$$I_A : x \in X \to I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } x \in A \\ 0, & \text{όταν } x \notin A \end{cases} \quad , \quad \text{δηλ.} \quad A = \{x \in X \mid I_A(x) = 1\},$$

όπως π.χ. στο ανωτέρω παράδειγμα, όπου η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $A = \{3,4,5\}$, είναι

$$I_A : x \in \mathbb{Z} \to I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } x \in A = \{3,4,5\} \\ 0, & \text{όταν } x \notin A. \end{cases}$$

Συνεπώς στα γνωστά κλασικά σύνολα, το αν ανήκει ή δεν ανήκει κάποιο στοιχείο x του σύμπαντος X στο σύνολο A, είναι απολύτως σαφές και έτσι κάθε κλασικό σύνολο A διαχωρίζει τα στοιχεία του σύμπαντος X σε δύο διακεκριμένες κατηγορίες:

-στην κατηγορία με τα στοιχεία του X που ανήκουν στο A, και
-στην κατηγορία με τα στοιχεία του X που δεν ανήκουν στο A.

Η μετάβαση μάλιστα από τη μια κατηγορία (των στοιχείων του X που ανήκουν στο A), στην άλλη κατηγορία (των στοιχείων του X που δεν ανήκουν στο A), είναι απολύτως σαφής, απότομη και ξεκάθαρη.

Όμως, αν επιχειρούσαμε να εκφράσουμε μαθηματικά μέσω του παραπάνω κλασικού συνόλου, μια απλή καθημερινή λεκτική έννοια της μορφής «ήταν *καμιά δεκαριά* φοιτητές», θα ήταν αδύνατον, αφού μια τέτοια καθημερινή μεν αλλά αόριστη-προσεγγιστική έννοια δεν μπορεί να διαχωρίσει σαφώς το σύνολο αναφοράς των ακεραίων $\mathbb{Z}$ σε δύο καθαρές κατηγορίες στοιχείων (σε αυτά που ανήκουν, και σε αυτά που δεν ανήκουν στο $\mathbb{Z}$), δεδομένου ότι η έννοια «*καμιά δεκαριά*» δηλ. «περίπου δέκα» δεν έχει καθαρά-σαφή όρια, όπως απαιτούν τα κλασικά μαθηματικά.

Έτσι, ο L. Zadeh επιχειρώντας να αναπαραστήσει μαθηματικά την παραπάνω απλή λεκτική-φυσική αλλά ασαφή-προσεγγιστική έννοια, οδηγήθηκε το 1965 στην έννοια του ασαφούς συνόλου, ως μιας νέας πιο ρεαλιστικής κατηγοριοποίησης των στοιχείων του σύμπαντος X, με μη-καθαρά αλλά ασαφή όρια, όπως συνήθως επιτάσσει η πραγματικότητα.

Δηλ. επινόησε ένα νέο μη-δίτιμο, αλλά πολύ-τιμο (με πολλές τιμές, πλειότιμο) σύνολο A, όπου η μετάβαση από την κατηγορία των στοιχείων του X που ανήκουν στο ασαφές σύνολο A, στην άλλη κατηγορία των στοιχείων του X

που δεν ανήκουν στο A, δεν είναι απότομη-σαφής αλλά είναι βαθμιαία-ασαφής (όπως συνήθως συμβαίνει στην πραγματικότητα).

Πιο συγκεκριμένα, η Ασαφής Συνολοθεωρία στηρίζεται στην επέκταση της έννοιας της ***χαρακτηριστικής συνάρτησης*** *(characteristic function)* ***ενός κλασικού συνόλου*** A (ως προς σύνολο αναφοράς X), δηλ.

$$I_A : x \in X \to I_A(x) \in \{0,1\}, \tag{1}$$

στη ***συνάρτηση συμμετοχής*** *(membership function)* ***ενός ασαφούς συνόλου*** A,

$$\mu_A : x \in X \to \mu_A(x) \in [0,1], \tag{2}$$

Ο αριθμός $\mu_A(x) \in [0,1]$ δηλώνει τον βαθμό συμμετοχής με τον οποίο το στοιχείο $x \in X$ ανήκει (συμμετέχει) στο ασαφές υποσύνολο A του X.

Δηλαδή:
$\mu_A(x) = 1$, σημαίνει ότι το x ανήκει ολοκληρωτικά στο A,
$\mu_A(x) = 0$, σημαίνει ότι το x δεν ανήκει καθόλου στο A,
$0 < \mu_A(x) < 1$, σημαίνει ότι το x ανήκει μερικά, δηλ. κατά κάποιο βαθμό στο A.

Στην παραπάνω επέκταση ας σημειωθεί ότι αυτή γίνεται γενικά από τη δίτιμη (τετριμμένη) άλγεβρα Boole $(\{0,1\},\wedge,\vee,',0,1)$, σε διάφορες πλειότιμες άλγεβρες επί του απειροδιαστήματος $[0,1]$, όπως η άλγεβρα Kleene, De Morgan, κ.λπ., (οι άλγεβρες Kleene και De Morgan είναι πιο «αδύνατες» από τις άλγεβρες Boole, δηλ. έχουν «δομικά» λιγότερες ιδιότητες από τις άλγεβρες Boole, (βλ. §2 και §7).

Στα πλειότιμα μοντέλα γενικά, η τιμή αλήθειας μιας πρότασης δεν παίρνει μόνον μία από τις τιμές 0 ή 1, αλλά μπορεί να παίρνει και τιμές μεταξύ 0 και 1, οπότε μια πρόταση που δεν είναι αληθής δεν σημαίνει αναγκαία ότι είναι ψευδής, αλλά μπορεί να είναι μερικά αληθής και μερικά ψευδής-όπως ένα μισογεμάτο ποτήρι,
δηλ. δεν ισχύει στην Ασαφή Λογική, η Αρχή της Αποκλείσεως του Τρίτου που ισχύει στην Κλασική δίτιμη Λογική, (βλ. [5] Δρόσος Κ., *Εισαγωγή στη Μαθηματική Σκέψη, Τόμος 1ος: Μαθηματικές Περιηγήσεις*, Πάτρα 2000).

Έτσι θα λέγαμε ότι, ***η Ασαφής Λογική αρχίζει όταν παύει να ισχύει η Αρχή της Αποκλείσεως του Τρίτου*** (της Κλασικής δίτιμης Λογικής).

Συνεπώς θα μπορούσαμε να πούμε ότι, *ένα κλασικό (ή εναργές-crisp) σύνολο αναφοράς X, έχει δύο είδη υποσυνόλων: τα κλασικά και τα ασαφή.*

Είτε καλλίτερα, ότι η χαρακτηριστική δίτιμη συνάρτηση $I_A(x)$ που εκφράζει ένα κλασικό σύνολο A στο διμελές πεδίο $\{0,1\}$, εμπεριέχεται στην έννοια της

συνάρτησης συμμετοχής $\mu_A(x)$ που εκφράζει ένα Ασαφές Σύνολο, στις ακραίες τιμές του απειροδιαστήματος [0,1],
(ως προς κοινό σύνολο αναφοράς, που είναι πάντα ένα κλασικό σύνολο X).
Δηλαδή, ***η έννοια του ασαφούς υποσυνόλου*** $\mu_A(x)$ ***εμπεριέχει την έννοια του κλασικού υποσυνόλου*** $I_A(x)$,
και μάλιστα όταν η $\mu_A(x)$ περιέχει μόνον τις δύο ακραίες τιμές 0 και 1 του διαστήματος $[0,1]$, τότε η $\mu_A(x)$ ταυτίζεται με την $I_A(x)$ και το A γίνεται ένα σύνηθες κλασικό υποσύνολο του X.

Ας σημειωθεί επίσης ότι, όπως χάριν απλούστευσης ένα κλασικό σύνολο A και η χαρακτηριστική του συνάρτηση I_A χρησιμοποιούνται συνήθως στην πράξη ως ταυτόσημες έννοιες,
όμοια και ένα ασαφές σύνολο A και η συνάρτηση συμμετοχής του μ_A χρησιμοποιούνται συχνά επίσης ως ταυτόσημες έννοιες, δηλ. συνήθως θεωρούμε $A \equiv \mu_A$.

Άρα, σχετικά με τον τυπολογικό ***ορισμό του Ασαφούς (Υπο)Συνόλου***, έχουμε:

Ένα ασαφές σύνολο (α.σ.) A, ως προς ένα (κλασικό) σύνολο αναφοράς X, ορίζεται μέσω της συνάρτησης συμμετοχής του

$$\mu_A : x \in X \to \mu_A(x) \in [0,1],$$

είτε ισοδύναμα,

ονομάζουμε ασαφές (υπο)σύνολο ενός κλασικού συνόλου X, μια συνάρτηση της μορφής

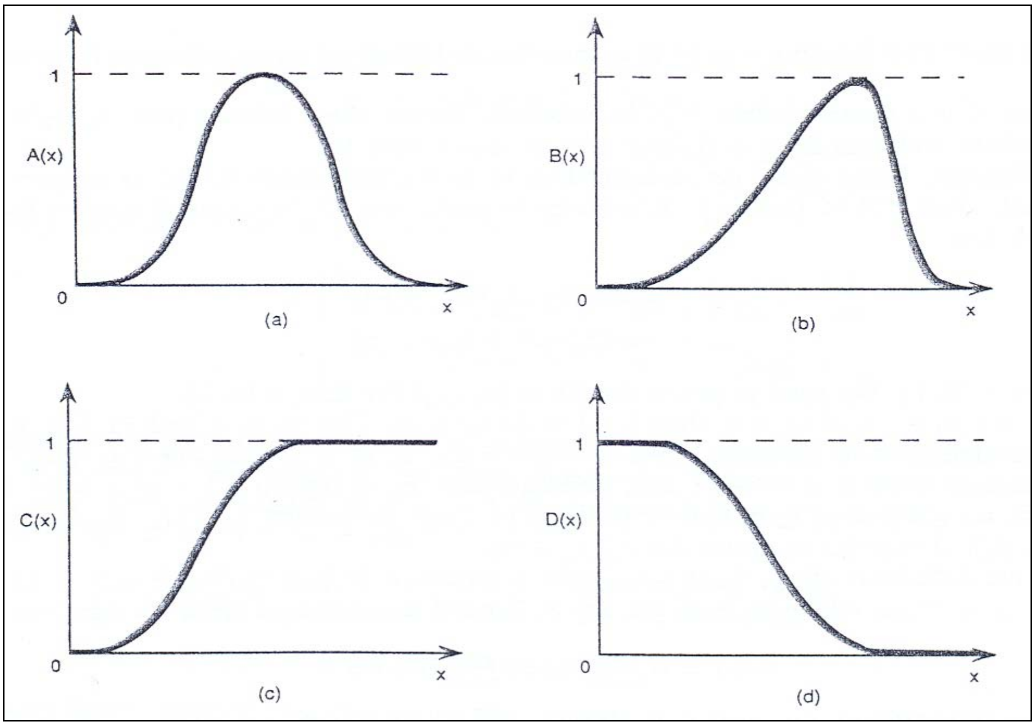
$$A : x \in X \to A(x) \in [0,1].$$

Τέλος το γράφημα-σχήμα των ασαφών συνόλων μπορεί να είναι γενικά μια κωδωνοειδής καμπύλη, βλ. Σχήματα 1.1, και 1.2,
στην πράξη όμως τα ασαφή σύνολα θεωρούνται συνήθως ως συμμετρικά τρίγωνα ή ισοσκελή τραπέζια επικεντρωμένα γύρω από κάποιες αντιπροσωπευτικές τιμές, βλ. Σχήματα 1.3 και 1.4.

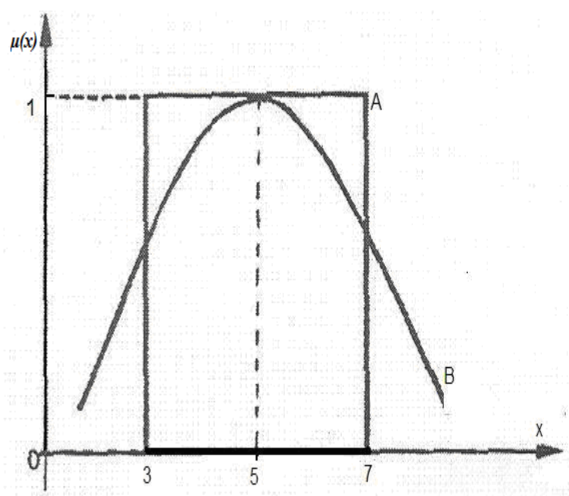
Δηλαδή,
(Σχήμα 1.3): Γ=«περίπου 4» είναι ένα ***Τριγωνικό Ασαφές Σύνολο*** *(triangular fuzzy set)*, ή Δ=«περίπου από 2 μέχρι 5» είναι ένα ***Τραπεζοειδές Ασαφές Σύνολο*** *(trapezoidal fuzzy set)* ή ένα *ασαφές διάστημα*,

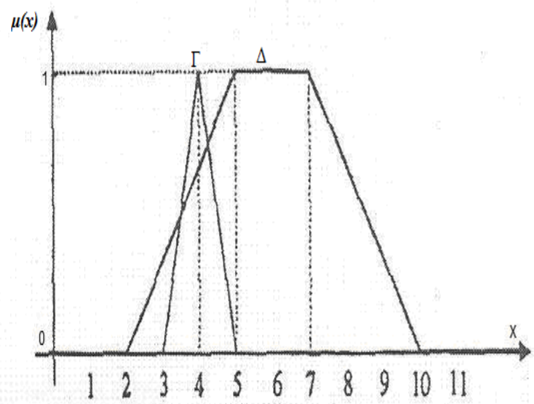
και

(Σχήμα 1.4): γίνεται σύγκριση συνήθων στην πράξη Ασαφών Συνόλων:
Α-*Τριγωνικού,* Β-*Τραπεζοειδούς και* Γ-*καμπανοειδούς (Gaussian-bell shaped),*
που εκφράζουν την ίδια ασαφή έννοια, ***«x περίπου 55»****.*



Σχήμα 1.1*:* *Διάφοροι γενικοί τύποι Ασαφών Συνόλων.*





Σχήμα 1.2: Γραφική σύγκριση:

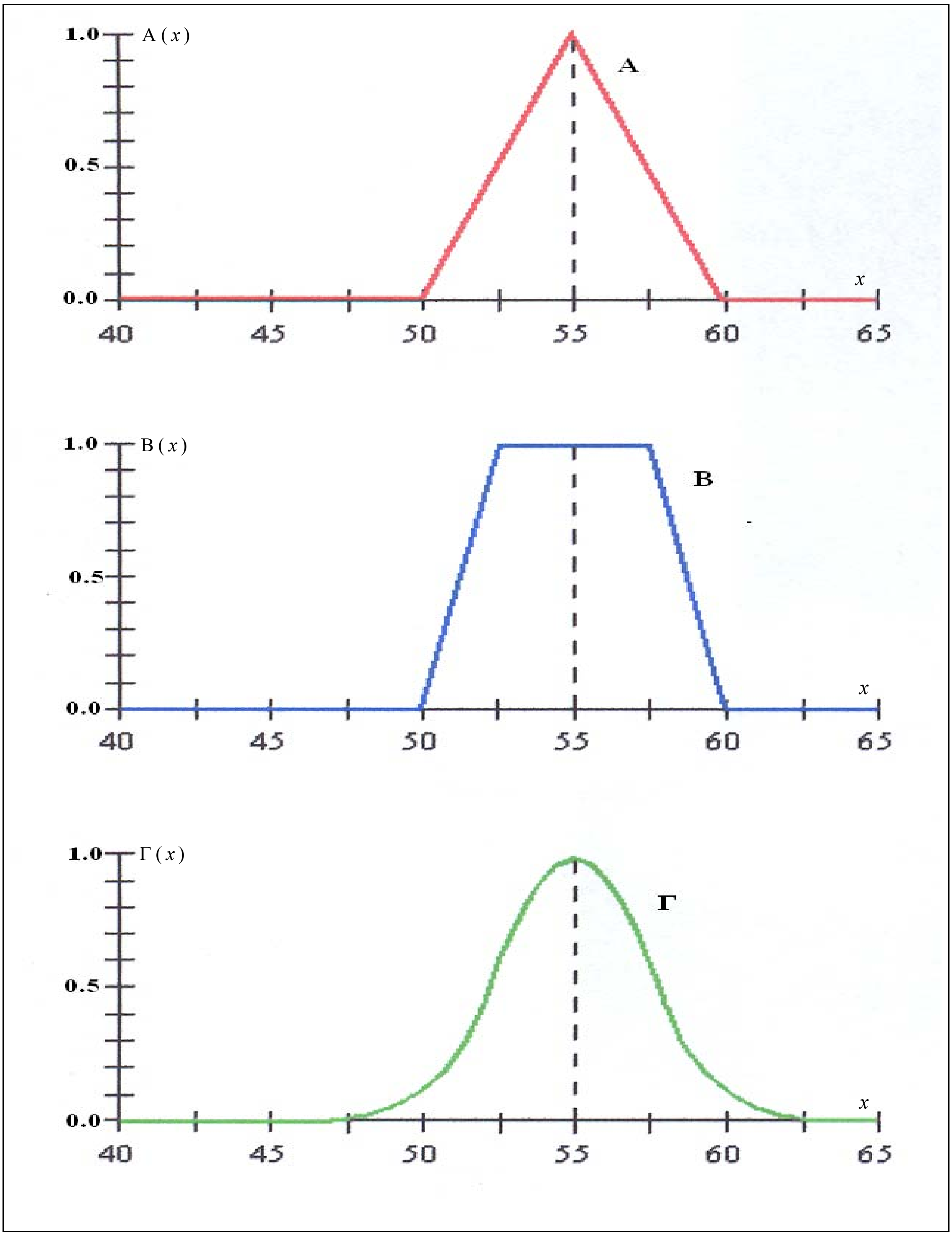
κλασικού συνόλου A = {3,4,5,6,7},

Σχήμα 1.3: Συνήθη στην πράξη, ασαφή σύνολα:

Τριγωνικό Γ=«περίπου 4»,

και *ασαφούς* συνόλου Β = «περίπου 5».

και *Τραπεζοειδές ή* ασαφές *διάστημα* Δ=«περίπου μεταξύ 5 και 7».



<u>Σχήμα 1.4:</u> *Σύγκριση συνήθων στην πράξη Ασαφών Συνόλων:*
Α-*Τριγωνικού,* Β-*Τραπεζοειδούς και* Γ-*καμπανοειδούς (Gaussian-bell shaped),*
που εκφράζουν την ίδια ασαφή έννοια, ***«x περίπου 55»,***

π.χ. "όριο ταχύτητας 55 km/h».

1.2 Οι βασικές Αρχές της Ασαφούς Λογικής

Οι βασικές Αρχές της Ασαφούς Λογικής συνοψίζονται επιγραμματικά στα εξής (βλ. Yager-Zadeh [32]):

- ***Στην Ασαφή Λογική, οτιδήποτε είναι διαβαθμισμένο.***
- ***Κάθε λογικό σύστημα μπορεί να ασαφοποιηθεί (fuzzification).***
- ***Κάθε ακριβής κατάσταση, στην Ασαφή Λογική θεωρείται ως οριακή περίπτωση μιας προσεγγιστικής κατάστασης.***

Η Ασαφής Λογική (ΑΛ) διαφέρει από την παραδοσιακή δίτιμη λογική τόσο στην ουσία όσο και στον τύπο. Μερικές από τις κύριες διαφορές τους συνοπτικά είναι (βλ. [8, 32, 33]):

i) *Αλήθεια ή Αληθοτιμές:* Στα δίτιμα λογικά συστήματα, η αληθοτιμή μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές, αληθής (1) ή ψευδής (0), το «τρίτο» αποκλείεται.
Στα πλειότιμα λογικά συστήματα η αληθοτιμή μιας πρότασης μπορεί να είναι ένα στοιχείο:

- ενός πεπερασμένου συνόλου,
- μιας άλγεβρας Boole,
- ενός διαστήματος όπως το [0,1], ή γενικότερα μιας πλειότιμης άλγεβρας.

Γενικά στην ΑΛ, η αληθοτιμή μιας πρότασης μπορεί να είναι ένα ασαφές υποσύνολο ενός οποιουδήποτε μερικώς διατεταγμένου συνόλου, το οποίο συνήθως λαμβάνεται ως το μοναδιαίο διάστημα $([0,1],\leq)$, που είναι ένα πλήρες δικτυωτό.
Επίσης οι λεγόμενες *γλωσσικές αληθοτιμές* εκφραζόμενες ως «αληθής», «πολύ αληθής», «όχι εντελώς αληθής», κ.λπ., ερμηνεύονται ως ετικέτες (labels) των ασαφών υποσυνόλων στο μοναδιαίο διάστημα $I=[0,1]$.

ii) *Κατηγορήματα-προτασιακοί τύποι (predicates):* Στα δίτιμα λογικά συστήματα, τα κατηγορήματα-προτασιακοί τύποι είναι οριστικά ή όπως θα λέγαμε αλλιώς είναι σαφή-ξεκάθαρα-εναργή-απόλυτα, π.χ. άρτιος, αληθής, νεκρός, ένοχος, έγκυος, μεγαλύτερος από 5.
Στην ΑΛ, οι προτασιακοί τύποι είναι ασαφείς-ανακριβείς-αόριστοι, όπως στην καθομιλουμένη γλώσσα, π.χ. κοντός, άρρωστος, γρήγορος, μεγάλος, όμορφη, μορφωμένος, περίπου 5, νέος. Ας σημειωθεί ότι οι περισσότερες καθημερινές φράσεις στη φυσική (καθομιλουμένη) γλώσσα των ανθρώπων είναι συνήθως αόριστες-προσεγγιστικές-ασαφείς παρά απολύτως ακριβείς-σαφείς, π.χ. καλός καιρός, λίγο άρρωστος, έτρεχε πολύ, μεγάλη θερμοκρασία, ήταν πολλοί, κάνει κρύο.

iii) *Προτασιακοί τροποποιητές (predicates modifiers):* Στα κλασικά δίτιμα συστήματα, ο μόνος ευρέως χρησιμοποιούμενος προτασιακός τροποποιητής είναι η άρνηση.
Στην ΑΛ υπάρχει μια ποικιλία προτασιακών τροποποιητών που επενεργούν ως *αοριστολογικοί τροποποιητές (hedges-φράχτες)*, όπως π.χ. πολύ, περισσότερο, λιγότερο, εντελώς, μάλλον, υπερβολικά.
Τέτοιοι προτασιακοί τροποποιητές παίζουν ουσιώδη ρόλο στη δημιουργία των τιμών μιας ***ασαφούς γλωσσικής μεταβλητής***, π.χ. «πολύ νέος, μάλλον νέος, λίγο νέος, λιγότερο νέος», κ.λπ., (Zadeh, 1973).

iv) *Ποσοδείκτες (quantifiers):* Στα κλασικά λογικά συστήματα υπάρχουν ακριβώς δύο ποσοδείκτες: ο καθολικός (universal-$\forall$) και ο υπαρξιακός (existential-$\exists$).
Η ΑΛ επιδέχεται επιπλέον μια ευρεία ποικιλία ασαφών ποσοδεικτών, όπως π.χ. λίγο, συνήθως, περισσότερο, σχεδόν πάντα, συχνά, γύρω στις δέκα, κ.λπ. Στην ασαφή λογική, ένας ασαφής ποσοδείκτης εκφράζεται ως ένας ασαφής αριθμός ή ως μια ασαφής σχέση (Zadeh, 1983a).

v) *Πιθανότητες:* Στα κλασικά δίτιμα λογικά συστήματα, η πιθανότητα p είναι μια συνάρτηση, $p : \mathcal{A} \to [0,1]$.
Στην ΑΛ μπορούμε επιπλέον να χρησιμοποιήσουμε γλωσσικές ή γενικότερα ***ασαφείς πιθανότητες***, όπως π.χ. πολύ πιθανό, λίγο πιθανό, απίθανο, πιθανότητα περίπου 0.8, μεγάλη πιθανότητα, κ.λπ., (Zadeh, 1986). Τέτοιες ασαφείς πιθανότητες εκφράζονται από ασαφείς αριθμούς και υπολογίζονται με χρήση της Ασαφούς Αριθμητικής, (βλ. [7, 11]).
Εξάλλου εκτός της χρήσης ασαφών πιθανοτήτων, η ΑΛ μας δίνει τη δυνατότητα να συσχετίζουμε και ***ασαφή ενδεχόμενα*** *(fuzzy events)*, όπως π.χ. «αύριο θα είναι μια καλή μέρα», όπου «καλή» είναι ένας ασαφής προτασιακός τύπος.
Η πιθανότητα ενός ασαφούς ενδεχομένου μπορεί να είναι κλασικός ή ασαφής αριθμός (Zadeh, 1968).

vi) *Δυνατότητες (possibilities):* Μια άλλη θεώρηση (πέρα από την Ασαφή Πιθανότητα) που παίζει κυρίαρχο ρόλο στην Ασαφή Λογική, είναι η ***Θεωρία Δυνατοτήτων*** *(Possibility Theory)* που βασίζεται σε νέες έννοιες και μεγέθη όπως, το ***Ασαφές Μέτρο*** *(Fuzzy Measure)*, ο ***Ασαφής Μετρικός Χώρος***, *η* ***Κατανομή Δυνατότητας*** *(possibility distribution)* ***ή Κατανομή Πίστης*** *(Belief distribution)*, κ.λπ.

Τα ασαφή μέτρα είναι ***μη-προσθετικές*** συνολοσυναρτήσεις (σε αντίθεση με τα πιθανοτικά μέτρα), είναι όμως αύξουσες ως προς τον εγκλεισμό ($\subseteq$) και χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση της αβεβαιότητας που προέρχεται από υποκειμενικές εκτιμήσεις. Μια ειδική περίπτωση ασαφών μέτρων είναι ***τα ασαφή μέτρα Δυνατότητας και Πίστης*** *(possibility - belief).*

Συνοπτικά μια κατανομή δυνατότητας $\pi(\cdot)$ ως προς σύνολο αναφοράς X μπορεί να θεωρηθεί γενικά ως ένα ασαφές σύνολο, $\pi : x \in X \to \pi(x) \in [0,1]$, που εκφράζεται μέσω του μέτρου δυνατότητας Π με τη σχέση $\pi(x) = \Pi(\{x\})$, όπου η δυνατότητα $\Pi(A)$ ενός ενδεχόμενου A ορίζεται:

$$\Pi(A) = \sup_{x \in X}\{\pi(x)\}, \text{ όταν } A \text{ είναι κλασικό σύνολο,}$$

και $$\Pi(A) = \sup_{x \in X}\{\min\{A(x), \pi(x)\}\}, \text{ όταν } A \text{ είναι ασαφές σύνολο.}$$

Η θεωρία δυνατοτήτων $\Pi(\cdot)$ έχει πολλές ομοιότητες με τη θεωρία πιθανοτήτων $P(\cdot)$, όπως $P(X) = 1 = \Pi(X)$, $P(\varnothing) = 0 = \Pi(\varnothing)$,

αλλά και σημαντικές διαφορές όπως:

στις πιθανότητες έχουμε, $P(A) + P(A^c) = 1$, ενώ στις υποκειμενικές κρίσεις όμως μπορεί κάποιος να θεωρεί δυνατό ότι συνυπάρχουν τα ενδεχόμενα «A συμβαίνει» και «A δεν συμβαίνει», π.χ. «κάποιος κατηγορούμενος πιστεύουμε ότι είναι ένοχος αλλά και δεν είναι», οπότε $\Pi(A) + \Pi(A^c) \neq 1$.

(Για περισσότερα σχετικά, βλ. §5 του παρόντος, και [7, 8, 12, 18, 31, 33]).

"An idea which can be used once is a trick. If it can be used more than once it becomes a method."

G. Polya (1971)

(Μια ιδέα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια φορά είναι ένα τέχνασμα. Αν μπορεί να χρησιμοποιηθεί περισσότερο από μια φορά γίνεται μια μέθοδος).

1.3 Ερμηνεία των Ασαφών Συνόλων

Η «Αντικειμενική Υποκειμενικότητα» των Ασαφών Συνόλων

Η συνάρτηση συμμετοχής ενός α.σ. μπορεί να εκφράσει υποκειμενικές απόψεις για την ίδια έννοια, σε αντίθεση με τη δείκτρια συνάρτηση ενός κλασικού συνόλου που εκφράζει μια απόλυτη, οριστική έννοια, ανεξάρτητη από παρατηρητές (με την έννοια ότι όλοι οι παρατηρητές θα εξέφραζαν με τον ίδιο τρόπο μια απόλυτη έννοια).

π.χ. για το α.σ. *A={ακέραιοι περίπου ίσοι με 2}*,
η μορφή του εξαρτάται από το «μάτι» του παρατηρητή, οπότε μπορεί να έχουμε διαφορετικές συναρτήσεις συμμετοχής που να εκφράζουν την ίδια ασαφή έννοια A.

Αντίθετα, το κλασικό σύνολο, π.χ. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 < x < 10\}$,
εκφράζει μια απόλυτη έννοια και η σημασία του είναι ανεξάρτητη από υποκειμενικές ερμηνείες.

Πιο συγκεκριμένα, στο Σχήμα 1.5, ***για την ίδια ασαφή έννοια*** *« x περίπου 2», με* $x \in \mathbb{R}$***, έχουμε τέσσερα διαφορετικά ασαφή σύνολα (υποκειμενικές απόψεις)***.

Όμως παρά τις σημαντικές (υποκειμενικές) διαφορές τους, όπως φαίνονται στα γραφήματα των συναρτήσεων συμμετοχής τους, έχουν και αρκετά βασικά κοινά (αντικειμενικά) χαρακτηριστικά.

Δηλαδή αναλυτικά, καθένα από αυτά τα ασαφή σύνολα, $A_i, (i = 1,2,3,4)$, εκφράζει με μια ιδιαίτερη μορφή, την ίδια γενική (ασαφή) έννοια *« x περίπου 2»*, με $x \in \mathbb{R}$, έχοντας όμως ταυτόχρονα τα εξής κοινά χαρακτηριστικά:

α) $A_i(2) = 1 \quad \text{και} \quad A_i(x) < 1, \ \text{γιά κάθε} \ x \neq 2, \ (i = 1,2,3,4)$.

β) A_i είναι συμμετρικό ως προς την ευθεία $x = 2$, δηλ. $A_i(2 + x) = A_i(2 - x), \ x \in \mathbb{R}$.

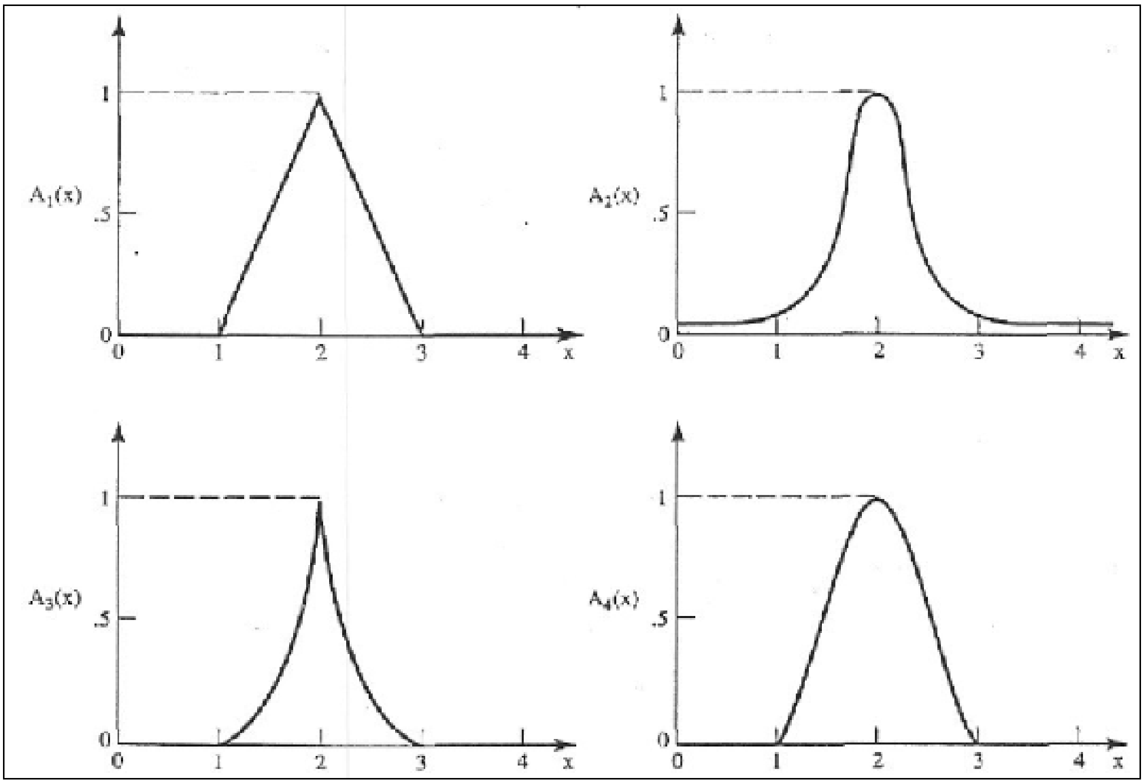
γ) $A_i(x)$ φθίνει από 1 μέχρι 0, με αύξουσα διαφορά $|2 - x|$.

Οι ιδιότητες αυτές είναι αναγκαίες για να εκφραστεί κατάλληλα η

δοθ είσα ασαφής έννοια *« x περίπου 2»*, με $x \in \mathbb{R}$,
αλλά και οποιοδήποτε άλλο α.σ. θέλει να εκφράσει την ίδια έννοια, πρέπει (γενικά) να έχει αυτές τις ιδιότητες.

Επίσης οι τέσσερις αυτές συναρτήσεις συμμετοχής, είναι όμοιες στο ότι για x εκτός του διαστήματος [1,3], έχουν «βαθμό συμμετοχής» αμελητέο ή 0.

Η ομοιότητα όμως αυτή δεν είναι πάντα απαραίτητη για την έκφραση της ασαφούς έννοιας, αλλά συνήθως συνάγεται από τα συμφραζόμενα.
Εξάλλου, συνήθως στις εφαρμογές δεν απαιτούνται εξειδικευμένα σχήματα για τις συναρτήσεις συμμετοχής των ασαφών συνόλων, αλλά αρκούν απλούστερα πρακτικά σχήματα (όπως τριγωνοειδές ή τραπεζοειδές, κ.λπ., βλ. και Σχήματα 1.3, 1.4).



Σχήμα 1.5: *Τέσσερα διαφορετικά ασαφή σύνολα, που εκφράζουν την ίδια ασαφή έννοια: « x είναι περίπου 2».*

Τέλος ας σημειωθεί ότι κάθε μια από τις ανωτέρω συναρτήσεις A_i, ανήκει σε μια γενικότερη παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων $A_i^{'}$, δηλ.:

$$A'_1(x) = \begin{cases} k_1(x-r)+1, & \text{όταν } x \in [\frac{r-1}{k_1}, r] \\ k_1(r-x)+1, & \text{όταν } x \in [r, \frac{r+1}{k_1}], \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \qquad A'_2(x) = \frac{1}{1+k_2(x-r)^2},$$

$A'_3(x) = e^{-|k_3(x-r)|}$, $\qquad A'_4(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\cos(k_4\pi(x-r))}{2}, & \text{όταν } x \in [\frac{r-1}{k_4}, \frac{r+1}{k_4}] \\ 0 & , \text{ αλλού} \end{cases}$

όπου, για $r = 2$ και $k_1 = 1,\ k_2 = 10,\ k_3 = 5,\ k_4 = 2$, παίρνουμε αντίστοιχα τα $A_i(x)$, ενώ όσο τα k_i αυξάνουν τόσο τα γραφήματα των A_i στενεύουν.

Συνεπώς η ερμηνεία της συνάρτησης $f: X \to [0,1]$, ως ασαφούς συνόλου, μας δίνει τη δυνατότητα να εκφράσουμε μαθηματικά, αόριστες-προσεγγιστικές έννοιες που χρησιμοποιούνται συχνά και στην καθομιλουμένη γλώσσα.

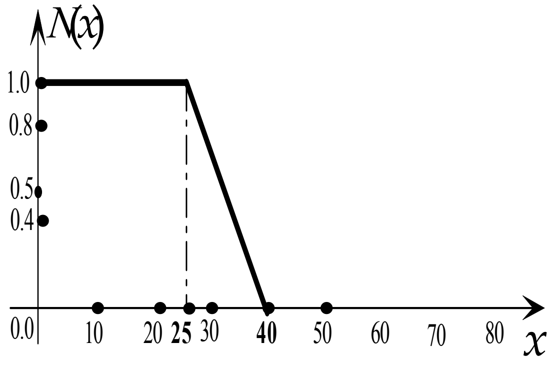
Όμως η έκφραση αυτή δεν εξαρτάται μόνο από την ίδια την έννοια αλλά και από τα *συμφραζόμενα-το γενικό νοηματικό περιβάλλον (context)*, όπου αυτή χρησιμοποιείται,

π.χ. η έννοια «*υψηλή θερμοκρασία*» άλλο νόημα έχει όταν μιλάμε για τον καιρό και άλλο νόημα έχει όταν μιλάμε για πυρηνικό αντιδραστήρα και προφανώς οι έννοιες αυτές θα εκφράζονται από πολύ διαφορετικά ασαφή σύνολα.

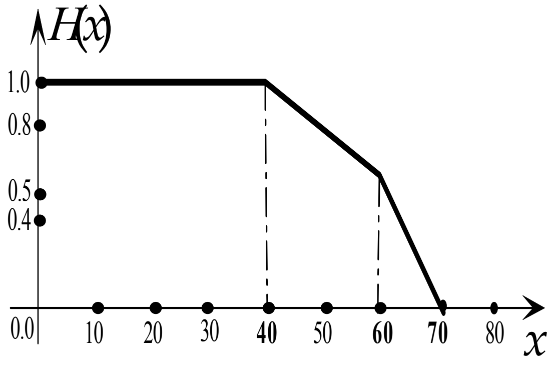
Άρα, η ίδια ασαφής έννοια μπορεί να εκφράζεται από πολλά και διαφορετικά ασαφή σύνολα και η επιλογή του κατάλληλου α.σ. είναι υποκειμενική, αφού τα όρια ενός α.σ. είναι ασαφή και επομένως εξαρτώνται τελικά από την κρίση του παρατηρητή.

Αυτή όμως η ελαστικότητα ως προς την υποκειμενική επιλογή του α.σ. είναι πολύ χρήσιμη στις εφαρμογές, όπως π.χ. στην Ασαφή Θεωρία Ελέγχου (fuzzy control), στις Ασαφείς Αποφάσεις (fuzzy decision), κ.λπ.

Για παράδειγμα, για την ίδια ασαφή έννοια «νέος», αλλιώς την αξιολογεί ένα Νεαρό άτομο N και αλλιώς ένας Ηλικιωμένος H,
οπότε η έννοια αυτή μπορεί να εκφράζεται από δύο διαφορετικά ασαφή σύνολα $N(x)$ και $H(x)$ αντίστοιχα, δηλαδή (βλ. Σχήματα 1.6 και 1.7):



<u>***Σχήμα 1.6:***</u> *«νέος», κατά την άποψη*



<u>***Σχήμα 1.7:***</u> *«νέος», κατά την άποψη*

Νεαρού, *N(x)*. Ηλικιωμένου, *H(x)*.

$$N(x)=\begin{cases}1\ , & \text{αν } x<25\\ \frac{40-x}{15}, & \text{αν } 25\le x\le 40\\ 0\ , & \text{αν } 40<x\end{cases}$$

$$H(x)=\begin{cases}1\ , & \text{αν } x<40\\ \frac{80-x}{40}, & \text{αν } 40\le x\le 60\\ \frac{70-x}{20}, & \text{αν } 60<x\le 70\\ 0\ , & \text{αν } 70>x\end{cases}$$

1.4 Βασικά χαρακτηριστικά των ασαφών συνόλων

1) Ονομάζεται ***α-διατομή*** *(a-cut,* ή *a-level set)* ενός ασαφούς συνόλου A ως προς σύνολο αναφοράς X, το κλασικό (crisp-ξερό) σύνολο A^{α} που ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{A^{\alpha}=\{x\in X \mid A(x)\ge\alpha\},\quad \text{με}\quad \alpha\in[0,1]}, \tag{3}$$

Όμοια, ορίζεται το κλασικό σύνολο $A^{\alpha+}$, ***ισχυρή α-διατομή*** *(strong a-cut)*:

$$A^{\alpha+}=\{x\in X \mid A(x)>\alpha\},\quad \text{με}\quad \alpha\in[0,1], \tag{4}$$

Για α=1, το σύνολο 1-διατομή $A^{1}=\{x\in X \mid A(x)=1\}$, λέγεται και ***πυρήνας*** *(core-kernel)* του α.σ. X .
Δηλ. ο πυρήνας του α.σ. A, είναι το κλασικό σύνολο που περιλαμβάνει εκείνα τα στοιχεία x του σύμπαντος X, για τα οποία $A(x)=1$, (βλ. και Σχήμα 1.8).

Κάθε α.σ. προσδιορίζει μοναδικά όλες τις α-διατομές (και ισχυρές α-διατομές) αυτού. Αλλά και αντίστροφα, η οικογένεια των α-διατομών (καθώς και των ισχυρών α-διατομών) ενός α.σ., το προσδιορίζουν μοναδικά.
Δηλ. κάθε ασαφές σύνολο Α μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα, πλήρως και μοναδικά, μέσω της οικογένειας των α-διατομών αυτού, σύμφωνα με το επόμενο θεμελιώδες Θεώρημα.

Θεώρημα Αναπαράστασης-Διάσπασης ενός Ασαφούς Συνόλου
(Representation-Decomposition Theorem)

Κάθε ασαφές σύνολο A μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα, πλήρως και μοναδικά, μέσω της οικογένειας των α-διατομών αυτού, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\boxed{A=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha A^{\alpha}=\sum_{\alpha\in[0,1]}\alpha A^{\alpha}=\sup_{\alpha\in[0,1]}\alpha A^{\alpha}=\sup_{\alpha\in[0,1]}\{\min\{\alpha,I_{A^{\alpha}}\}\}}, \tag{5}$$

όπου[1],

$$\mathrm{I}_{A^{\alpha}}(x)=\begin{cases}1, & \text{όταν}\ A(x)\ge\alpha \Leftrightarrow x\in A^{\alpha}\\ 0, & \text{όταν}\ A(x)<\alpha \Leftrightarrow x\notin A^{\alpha}\end{cases},$$

είναι η χαρακτηριστική ή δείκτρια συνάρτηση του A^{α}.

---

(1) Αν το $\sup B$ δηλ. το ανώτερο πέρας (supremum) ενός κλασικού συνόλου B, ανήκει στο B, τότε $\sup B = \max B$, δηλ. ταυτίζεται με το μέγιστο (maximum) του B. Στο εξής θα θεωρούμε, $\sup B = \max B$, αφού συνήθως στην πράξη $(\sup B) \in B$, (βλ. και Παράρτημα §7).

Δηλ. κάθε α.σ. προσδιορίζει μοναδικά όλες τις α-διατομές αυτού. Αλλά και αντίστροφα, η οικογένεια των α-διατομών ενός α.σ., το προσδιορίζουν μοναδικά.

Αυτή η σημαντική ικανότητα, να «διασπάται» ένα α.σ. σε μια οικογένεια κλασικών συνόλων (α-διατομών), είναι πολύ χρήσιμη-ιδιαίτερα στις εφαρμογές και χρησιμοποιείται συχνά για να μετατρέπονται σχέσεις και πράξεις μεταξύ ασαφών συνόλων, σε σχέσεις και πράξεις μεταξύ των αντίστοιχων κλασικών α-διατομών των ασαφών συνόλων, (βλ. [1,12,18,21,23].

Το παραπάνω σημαντικότατο και θεμελιώδες Θεώρημα για την Ασαφή Λογική, δείχνει ότι ένα ασαφές σύνολο είναι απλά μια ειδική οικογένεια κλασικών (crisp-ξερών) συνόλων.

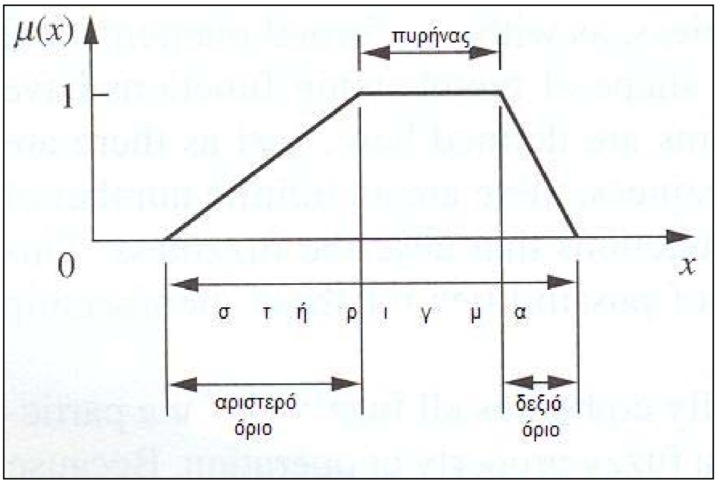
2) ***Στήριγμα ή Φορέας*** *(support)* ενός α.σ. A (ως προς σύνολο αναφοράς X), λέγεται το κλασικό σύνολο

$$\boxed{\mathbf{supp}(A) = \{x \in X \mid A(x) > 0\}}, \tag{6}$$

Προφανώς, $\varnothing \subseteq \text{supp}(A) \subseteq X$ και $\text{supp}(A) = A^{0+}$, (βλ. και Σχήμα 1.8).

π.χ. αν $A = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0,1}{3} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,8}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0}{7}$, στο $X = \{1, 2, ..., 7\}$,
τότε:

$\text{supp}(A) = \{3, 4, 5, 6\} \subseteq X$, (αφού, $A(1) = A(2) = A(7) = 0$).



<u>***Σχήμα 1.8:***</u> *Ο πυρήνας και το στήριγμα ενός ασαφούς συνόλου.*

3) ***Ύψος*** *(height)* ενός α.σ. A (στο X), λέγεται το μέγιστο των βαθμών συμμετοχής στο X όλων των στοιχείων του X, δηλ.:

$$hgt(A) = \sup_{x \in X} A(x)\,, \qquad (7)$$

Αν $hgt(A) = 1$, τότε το α.σ. A λέγεται ***κανονικό*** *(normal)*, ή ***κανονικοποιημένο*** *(normalized)*, ενώ αν $hgt(A) < 1$ τότε το A λέγεται ***υποκανονικό*** *(subnormal)*.

π.χ. Αν $X = \{1,2,3\}$, $A = \frac{0,1}{1} + \frac{0,5}{2} + \frac{1}{3}$ και $B = \frac{0,1}{1} + \frac{0,6}{2} + \frac{0,9}{3}$,
τότε $A =$ κανονικό και $B =$ υποκανονικό.

Ας σημειωθεί ότι ένα υποκανονικό α.σ. $A \neq \varnothing$, μπορεί να γίνει κανονικό, διαιρώντας $A(x)$ δια $hgt(A)$.

4) Ένα α.σ. A ως προς X λέγεται ***κενό ασαφές σύνολο*** *(empty fuzzy set)*, συμβολίζοντας $A = \varnothing$, όταν: $\forall x \in X$, είναι $A(x) = 0$,

δηλ. $\mu_A \equiv \varnothing : x \in X \to \mu_A(x) = 0$.

Επίσης, για το βασικό σύνολο X, προφανώς ισχύει: $\forall x \in X, \quad A_X(x) = 1$,
δηλ. $\mu_X : x \in X \to \mu_X(x) = 1$.

5) ***Πληθάριθμος*** *(cardinality)* ενός α.σ. A (ως προς σύμπαν X πεπερασμένο), που συμβολίζεται με $|A|$ ή $card(A)$, ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{|A| = card(A) = \sum_{i=1}^{n} A(x_i)} \qquad (8)$$

π.χ. Αν $A = \frac{1}{x_1} + \frac{0,8}{x_2} + \frac{0,6}{x_3} + \frac{0}{x_4}$, τότε $|A| = 1 + 0,8 + 0,6 + 0 = 2,4$.

(Αν X είναι μη-πεπερασμένο, τότε προφανώς ο πληθάριθμος $|A|$ δεν υπάρχει πάντα).

Ο πληθάριθμος ενός α.σ., δηλ. ο αριθμός που ορίζει πόσα στοιχεία περιέχει ένα α.σ. (όπου το «πόσα στοιχεία», περιλαμβάνει και τα «ποσοστά συμμετοχής» καθενός στοιχείου) είναι μια σημαντικότατη έννοια τόσο για τη θεωρία όσο και για τις εφαρμογές, αλλά δυστυχώς ακόμη και σήμερα φαίνεται να είναι ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα αφού οι μέχρι σήμερα προταθέντες ορισμοί είναι ακόμη αμφιλεγόμενοι.

Ο παραπάνω ορισμός (8) είναι ο πιο απλός και επικρατέστερος σήμερα και δίνει μη-ασαφή πληθάριθμο για ένα ασαφές σύνολο, ενώ για ασαφή πληθάριθμο έχουν προταθεί και διάφοροι άλλοι ορισμοί, (βλ. Dubois [7] και Kacprzyk [10]).

Εξάλλου ας σημειωθεί ότι, ένα α.σ. A ως προς ένα σύνολο αναφοράς X, όπου X πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, ορίζεται (κυρίως για πρακτικούς λόγους) και σαν ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών, του κάθε στοιχείου $x \in X$ και του αντίστοιχου βαθμού συμμετοχής του $\mu_A(x)$ στο A, (βλ. [10, 12]), δηλαδή:

$$A = \{(\mu_A(x), x) \mid x \in X\}.$$

Συνήθως μάλιστα στις πρακτικές εφαρμογές των Ασαφών Συνόλων, έχει επικρατήσει να συμβολίζεται το διατεταγμένο ζεύγος $(\mu_A(x), x)$ με $\frac{\mu_A(x)}{x}$, και η ένωση $\cup$ με Σ, οπότε ένα πεπερασμένο α.σ., $A = \{(\mu_A(x_1), x_1), \ldots, (\mu_A(x_n), x_n)\}$, παριστάνεται και ως εξής:

$$\boxed{A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}, \quad (x_1, \ldots, x_n \in X)}, \tag{9}$$

όπου οι πράξεις + και Σ δεν σημαίνουν τη συνήθη αλγεβρική πρόσθεση, αλλά τη συνολοθεωρητική $\cup$, ή «or».

Οπότε σ' αυτή τη (πρακτική) μορφή, τα κλάσματα είναι στην ουσία διατεταγμένα ζεύγη, δηλ. π.χ. τα $\frac{0,3}{0}$ και $\frac{0}{x_1}$ δεν είναι συνήθη κλάσματα, αλλά σημαίνουν ότι $0,3 \to 0$ και $0 \to x_1$, ενώ τα ζεύγη $\frac{\mu_A(x)}{x}$ με $\mu_A(x) = 0$, συνήθως παραλείπονται.

Όμοια, αν X είναι απειροσύνολο (π.χ. είναι ένα διάστημα πραγματικών αριθμών), τότε το α.σ. A γράφεται: $A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x}$, όπου το σύμβολο $\int$ δεν έχει τη συνήθη έννοια, αλλά είναι φυσική επέκταση του παραπάνω Σ, δηλ. σημαίνει ότι το α.σ. A απαρτίζεται από το «συνεχές άθροισμα» των βαθμών (ή ποσοστών) συμμετοχής καθενός στοιχείου, (βλ. [10] και [12]).

6) Ένα ασαφές σύνολο A (ως προς $\mathbb{R}$) λέγεται ***κυρτό*** *(convex)*, όταν όλες οι α-διατομές αυτού είναι κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, είτε ισοδύναμα, όταν όλες οι α-διατομές του A είναι κλειστά διαστήματα του $\mathbb{R}$, (10α)

Ισοδύναμα επίσης ισχύει το Θεώρημα:

Θεώρημα: Ένα ασαφές σύνολο A (ως προς $\mathbb{R}$) είναι κυρτό, ανν (αν και μόνον αν) ισχύει:

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{A(x_1), A(x_2)\}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ \text{ και } \ \lambda \in [0,1], \tag{10β}$$

(για περισσότερα σχετικά, βλ. π.χ. [12]).

1.5.2 Βασικές Ασαφείς Συνολοθεωρητικές Πράξεις, Το Ασαφές Δυναμοσύνολο $\mathcal{F}(X)$

Μια ανάλογη φυσική επέκταση αυτών των κλασικών πράξεων ($\cup, \cap, \bar{\ }$), από το κλασικό δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ στο σύνολο όλων των ασαφών υποσυνόλων του X, δηλ. στο ***ασαφές δυναμοσύνολο*** *(fuzzy power-set)*

$$\boxed{\mathcal{F}(X) = [0,1]^X = \{A \subseteq X \mid \mu_A : x \in X \to \mu_A(x) \in [0,1]\}} \tag{19}$$

οι οποίες επάγονται μέσω της δομής $([0,1], \cup, \cap, \bar{\ }, 0, 1)$, μια δομή που αποδεικνύεται ότι είναι ένα πλήρες δικτυωτό και μια De Morgan άλγεβρα, ορίζονται ως ακολούθως ($\forall A, B \in \mathcal{F}(X)$ και $\forall x \in X$), βλ. και Σχήμα 1.9:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\} = \vee\{A(x), B(x)\}, & \text{Ένωση} \\ (A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\} = \wedge\{A(x), B(x)\}\ , & \text{Τομή} \\ \overline{A}(x) = 1 - A(x)\ , & \text{Συμπλήρωμα} \end{array}} \tag{20}$$

π.χ. για τα ασαφή σύνολα, $A = \{\frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.2}{5}\}$ και $B = \{\frac{0}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{0.2}{4} + \frac{0.4}{5}\}$, είναι:

$$A \cup B = \{\tfrac{0}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{0.7}{3} + \tfrac{0.3}{4} + \tfrac{0.4}{5}\},$$

$$A \cap B = \{\tfrac{0}{1} + \tfrac{0.5}{2} + \tfrac{0.5}{3} + \tfrac{0.2}{4} + \tfrac{0.2}{5}\},$$

$$\text{και} \qquad \overline{A} = \{\tfrac{1}{1} + \tfrac{0}{2} + \tfrac{0.5}{3} + \tfrac{0.7}{4} + \tfrac{0.8}{5}\}.$$

(Στην Ασαφή Συνολοθεωρία τα σύμβολα, $(\cup, \vee, \max, +)$ χρησιμοποιούνται συνήθως ως ταυτόσημα, όπως και τα $(\cap, \wedge, \min, \cdot)$ και $(\bar{\ }, ', {}^c))$.

Για τις ανωτέρω πράξεις (20) των ασαφών συνόλων, ***αποδεικνύεται ότι στο*** $\mathcal{F}(X)$ ***ισχύουν όλες οι ιδιότητες των κλασικών συνόλων (Πίνακας 1), εκτός από τις δύο τελευταίες, όπου αντί αυτών στην Ασαφή Λογική ισχύει:***

$$\boxed{A \cup \overline{A} \neq X \sim 1 \quad \text{και} \quad A \cap \overline{A} \neq \varnothing \sim 0}, \tag{21}$$

Έτσι θα λέγαμε ότι η Ασαφής Λογική αρχίζει όταν ισχύουν οι σχέσεις (21), ενώ το $\mathcal{F}(X)$ δεν είναι συμπληρωμένο - υπό την έννοια της άλγεβρας Boole $\mathcal{P}(X)$, αφού

$$(A \cup A')(x) = \max\{A(x), A'(x)\} \neq 1,$$

$$\text{π.χ. γιά} \quad A(x) = \tfrac{1}{3} \Rightarrow \max\{A(x), A'(x)\} = \tfrac{1}{3} \vee \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{3} \neq 1$$

και

$$(A \cap A')(x) = \min\{A(x), A'(x)\} \neq 0$$

$$\text{π.χ. γιά} \quad A(x) = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \min\{A(x), A'(x)\} = \tfrac{1}{2} \wedge \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \neq 0.$$

Δηλ. οι παραπάνω ιδιότητες (21), στα ασαφή σύνολα δεν ισχύουν για κάθε τιμή $A(x) \in (0,1)$, αλλά ισχύουν μόνον στα άκρα του $[0,1]$ δηλ. όταν $A(x) \in \{0,1\}$.
Όλες οι άλλες όμως προαναφερθείσες κλασικές συνολοθεωρητικές ιδιότητες του Πίνακα 1, επεκτείνονται και στα ασαφή σύνολα, (βλ. Dubois-Prade [7]).

Έτσι για τις βασικές εσωτερικές πράξεις (20) της Ασαφούς Λογικής, δηλ. ($\cup, \cap, '$ ή $\vee, \wedge, \bar{\ }$), είτε ισοδύναμα ($\subseteq, '$ ή $\leq, \bar{\ }$), ισχύει ο παρακάτω συνοπτικός Πίνακας 2, για κάθε $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$:

Πίνακας 2: Ιδιότητες Ασαφών Συνόλων

$\overline{\overline{A}} = A$		Αυτοπαθής (Involution)
$A \cup B = B \cup A$		Αντιμεταθετικότητα (Commutativity)
$A \cap B = B \cap A$		
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$		Προσεταιριστικότητα (Associativity)
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$		
$(A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$		Επιμεριστικότητα (Distributivity)
$(A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$		
$A \cup A = A,$	$A \cap A = A$	Ταυτοδύναμη (Idempotence)
$(A \cup (A \cap B) = A,$	$(A \cap (A \cup B) = A$	Απορροφητικότητα (Absorption)
$A \cup X = X,$	$A \cap \varnothing = \varnothing$	Απορροφητικότητα από X και $\varnothing$
$A \cup \varnothing = A,$	$A \cap X = A$	Ταυτότητα - ουδέτερα (Identity)
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	De Morgan νόμοι
$A \cup A' \neq X \sim 1$		***Δεν ισχύει ο νόμος της Αντίθεσης***
$A \cap A' \neq \varnothing \sim 0$		***Δεν ισχύει ο νόμος Συμπλήρωματος***

Εξάλλου, όπως ***η κλασική δομή*** $(\mathcal{P}(X)=\{0,1\}^X, \cup, \cap, ', \ 1=X,\ 0=\varnothing)$ ***είναι μια άλγεβρα Boole*** που επάγεται από τη δομή του $\{0,1\}$, που ως γνωστό είναι η πιο απλή (δίτιμη) άλγεβρα Boole,

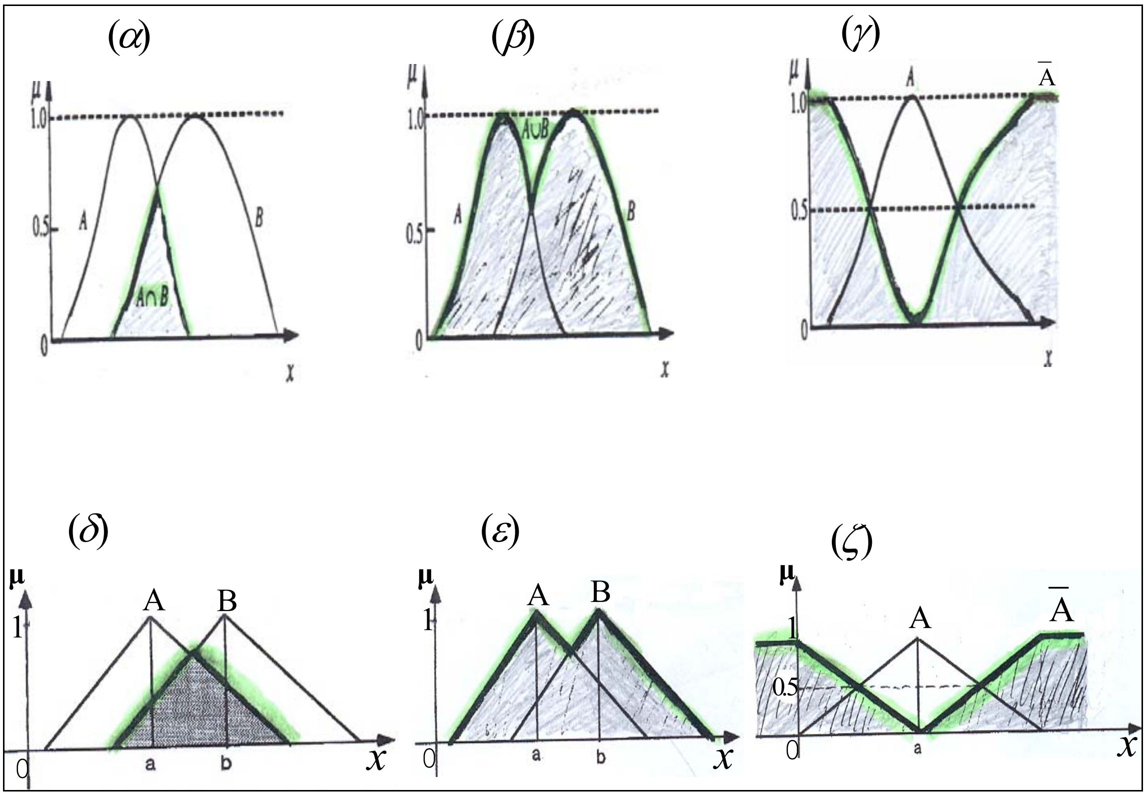
όμοια και ***η δομή*** $(\mathcal{F}(X)=[0,1]^X, \cup, \cap, ', \ 1=X,\ 0=\varnothing)$ ***αποδεικνύεται ότι είναι ένα πλήρες δικτυωτό και μια De Morgan άλγεβρα και μια άλγεβρα Kleene, αλλά όχι όμως μια άλγεβρα Boole***, (βλ. §2, §7 και [1, 7, 18]),

αφού το $\mathcal{F}(X)$ δεν έχει συμπληρωματικά στοιχεία υπό την έννοια της συμπληρωματικότητας της άλγεβρας Boole,

δηλ. $A \cap A' \neq \varnothing \sim 0 \quad \textit{και} \quad A \cup A' \neq X \sim 1$,

ενώ έχει ουδέτερα στοιχεία $\varnothing$ και X, αφού $A \cup \varnothing = A, \quad A \cap X = A$.
Επίσης το $\mathcal{F}(X)$ έχει ιδιότητες που επάγονται από το $([0,1], \cup, \cap, ', 0, 1)$,
αφού $(\mathcal{F}(X), \cup, \cap, ', 0, 1) \sim ([0,1]^X, \cup, \cap, ', 0, 1)$, (βλ. Nguyen-Walker [18]).

Τέλος στο Σχήμα 1.9, δίνονται συνοπτικά τα γραφήματα των τριών βασικών πράξεων των ασαφών συνόλων *(Τομή-Ένωση-Συμπλήρωμα)*, όπως ορίζονται στις σχέσεις (20), και όπου στις γραμμοσκιασμένες περιοχές απεικονίζονται τα αποτελέσματα των ασαφών συνολοθεωρητικών πράξεων.



<u>*Σχήμα 1.9:*</u>
Τομή-Ένωση-Συμπλήρωμα καμπανοειδών (Gaussian) ασαφών συνόλων (α),(β),(γ), αντίστοιχα,
και
Τομή-Ένωση-Συμπλήρωμα τριγωνικών ασαφών συνόλων (δ),(ε),(ζ), αντίστοιχα,

δηλ. $(\forall x \in X)$:

$$(A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\} = \wedge\{A(x), B(x)\}\ , \quad \text{Τομή,}$$

$$(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\} = \vee\{A(x), B(x)\}, \quad \text{Ένωση,}$$

$$\overline{A}(x) = 1 - A(x)\ , \qquad \text{Συμπλήρωμα,}$$

ενώ προφανώς ισχύει,

$$A \cup \overline{A} \neq X \sim 1, \qquad A \cap \overline{A} \neq \varnothing \sim 0\,.$$

Παρατηρήσεις *(στις πράξεις των ασαφών συνόλων)*

α) Οι προαναφερθέντες ορισμοί και ιδιότητες των πράξεων ασαφών συνόλων (ασαφής ένωση-τομή-συμπλήρωμα) είναι επεκτάσεις των αντίστοιχων εννοιών των κλασικών συνόλων, στις οποίες κλασικές έννοιες επανερχόμαστε όταν θεωρήσουμε ότι τα εμπλεκόμενα σύνολα είναι δίτιμα, δηλ. παίρνουν τιμές μόνο στο $\{0,1\}$ και όχι στο διάστημα $[0,1]$. Γι' αυτό και συνήθως χρησιμοποιούμε τα ίδια σύμβολα.

Ενώ όμως οι τρεις βασικές πράξεις (ένωση-τομή-συμπλήρωμα) είναι μοναδικές για τα κλασικά σύνολα,
για την ασαφή συνολοθεωρία αυτές οι τρεις πράξεις μπορούν να οριστούν και κατά διάφορους άλλους (εκτός του προαναφερόμενου) τρόπους.

Αυτή η ευρύτερη οικογένεια των διάφορων Ασαφών Τομών και Ασαφών Ενώσεων, που κατασκευάζονται ανάλογα με το ασαφές πεδίο που επιχειρούν να εκφράσουν,
αναφέρονται συνήθως στη διεθνή βιβλιογραφία ως ***t-norms*** *(t-στάθμες, triangular norms)*
και ***t-conorms*** *(t-συστάθμες)*, αντίστοιχα,
(για περισσότερα, βλ. π.χ. [1, 12, 17, 18]).

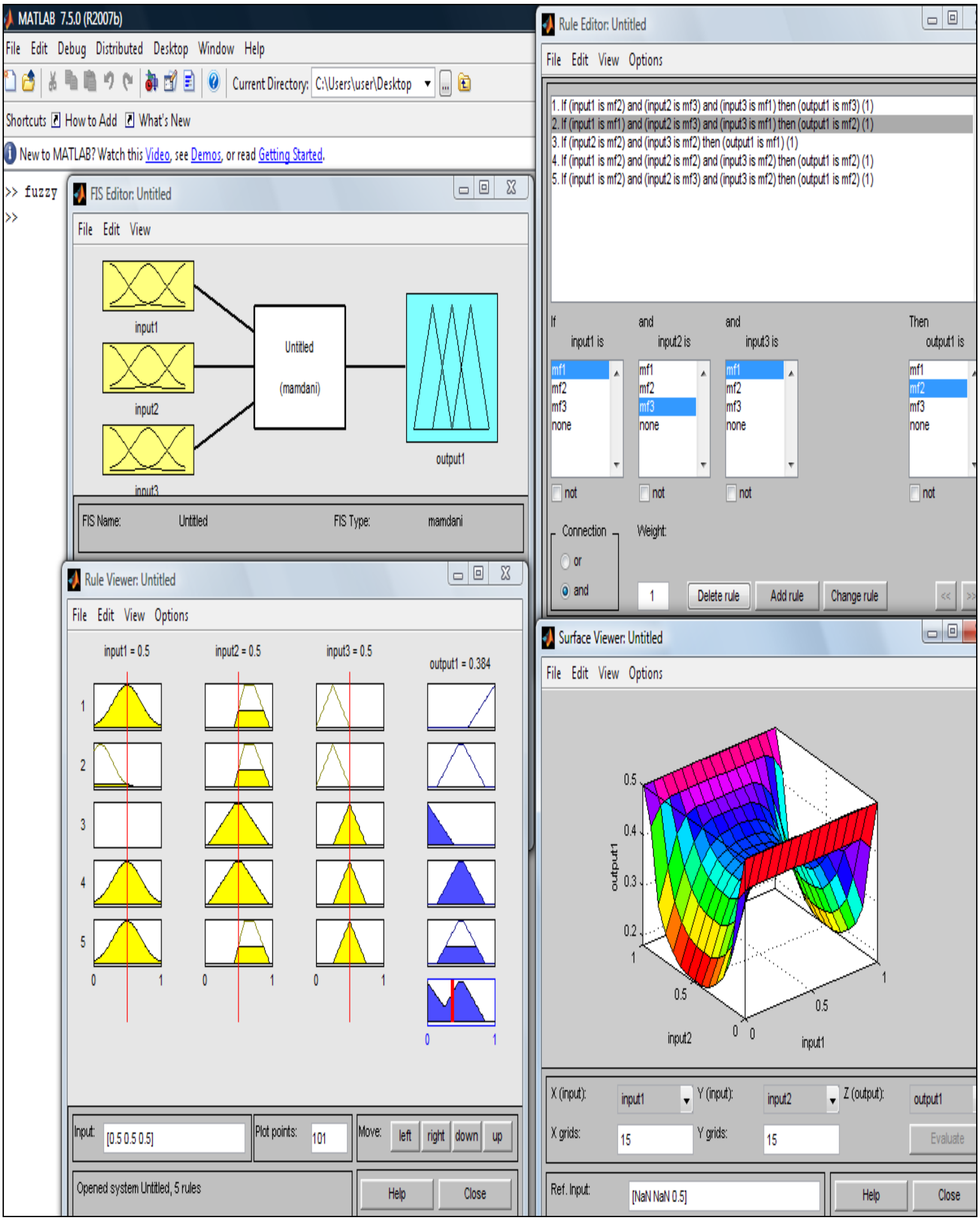
β) ***Η τομή*** $A \cap B$***, είναι το «μεγαλύτερο» α.σ. που περιέχεται σε αμφότερα τα α.σ.*** A ***και*** B,

ενώ η ένωσή τους $A \cup B$ ***είναι το «μικρότερο» α.σ. που περιέχει αμφότερα τα*** A, B,

(αφού για κάθε α.σ. C, με $C \subseteq A$ και $C \subseteq B$, συνεπάγεται $C \subseteq A \cap B$,
και για κάθε α.σ. D, με $D \supseteq A$ και $D \supseteq B$, συνεπάγεται $D \supseteq A \cup B$).

Δηλ. για κάθε $x \in X$, ισχύει:

$$\boxed{(A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\} \leq \max\{A(x), B(x)\} = (A \cup B)(x)} \tag{22}$$


MATLAB 7.5.0 (R2007b)
File Edit Debug Distributed Desktop Window Help
Current Directory: C:\Users\user\Desktop
Shortcuts How to Add What's New
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.
>> fuzzy
>>
FIS Editor: Untitled
File Edit View
input1
input2
input3
Untitled
(mamdani)
output1
FIS Name: Untitled
FIS Type: mamdani
Rule Editor: Untitled
File Edit View Options
1. If (input1 is mf2) and (input2 is mf3) and (input3 is mf1) then (output1 is mf3) (1)
2. If (input1 is mf1) and (input2 is mf3) and (input3 is mf1) then (output1 is mf2) (1)
3. If (input2 is mf2) and (input3 is mf2) then (output1 is mf1) (1)
4. If (input1 is mf2) and (input2 is mf2) and (input3 is mf2) then (output1 is mf2) (1)
5. If (input1 is mf2) and (input2 is mf3) and (input3 is mf2) then (output1 is mf2) (1)
If input1 is
and input2 is
and input3 is
Then output1 is
mf1
mf2
mf3
none
not
Connection
or
and
Weight:
1
Delete rule
Add rule
Change rule
Rule Viewer: Untitled
File Edit View Options
input1 = 0.5
input2 = 0.5
input3 = 0.5
output1 = 0.384
Input: [0.5 0.5 0.5]
Plot points: 101
Move: left right down up
Opened system Untitled, 5 rules
Help
Close
Surface Viewer: Untitled
File Edit View Options
output1
input2
input1
X (input): input1
Y (input): input2
Z (output): output1
X grids: 15
Y grids: 15
Evaluate
Ref. Input: [NaN NaN 0.5]
Help
Close

- 45 -

• «Το ανά χείρας βιβλίο του Δρα Καθηγητή ΤΕΙ *Γιάννη Θεοδώρου* αποτελεί μια εξαιρετική εισαγωγή στο αντικείμενο και καλύπτει ένα κενό στην Ελληνική βιβλιογραφία. Ο συγγραφέας έχει πετύχει μια θαυμαστή ισορροπία μεταξύ θεωρίας και εφαρμογών που κάνει το βιβλίο κατάλληλο για πολλών ειδών σχετικά μαθήματα. Αξίζουν θερμά συγχαρητήρια στον συγγραφέα για μια πολύ χρήσιμη εισαγωγή στο αντικείμενο της Ασαφούς Λογικής και των Ασαφών Συνόλων».

--*Κώστας Δρόσος (Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών-Πανεπιστημίου Πατρών)*

«Η Ασαφής Λογική είναι η προσπάθεια των επιστημόνων και κυρίως αυτών που ασχολούνται με την "τεχνητή νοημοσύνη" να μελετήσουν και να κατανοήσουν τη δομή της φυσικής γλώσσας του ανθρώπου. Γενικότερα η προσπάθεια των επιστημόνων, στην περίοδο της «Κοινωνίας της Πληροφορίας» έχει εστιασθεί στην κατανόηση του ίδιου του ανθρώπου και κύρια των μηχανισμών πάνω στους οποίους στηρίζεται η ανθρώπινη ευφυΐα. Έτσι η σημαντικότερη συνέπεια της μετάβασης στην κοινωνία της πληροφορίας, είναι η μετατόπιση του κέντρου του ενδιαφέροντος από τα μαθηματικά της φύσης στα μαθηματικά του ανθρώπου! Πώς βλέπει, πώς ακούει, πώς αντιλαμβάνεται τα χρώματα, ποια είναι η δομή και η λειτουργία (νευροφυσιολογία) του εγκεφάλου, πώς λειτουργούν τα νευρωνικά του δίκτυα κ.λπ.».

• *Everything is a matter of degree*

(The Fuzzy Principle-Η Αρχή της Ασαφούς Λογικής)

Lotfi Zadeh

• Ο συγγραφέας ***Γιάννης Θεοδώρου*** (*teo@teilam.gr*) είναι τακτικός Καθηγητής Ανώτερων Μαθηματικών στο τμήμα Ηλεκτρονικής του ΤΕΙ Λαμίας, από το 1987. Είναι πτυχιούχος Μαθηματικός του Πανεπιστημίου Πατρών, κάτοχος του μεταπτυχιακού τίτλου DEA στη Μαθηματική Στατιστική του Πανεπιστημίου των Παρισίων "PARIS-VI, Pierre et Marie Curie", και διδάκτορας στη Στατιστική Ανάλυση Δεδομένων της Ασαφούς Λογικής του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών.

Στην πολύχρονη διδακτική και επιστημονική του πορεία έχει εργαστεί κατά καιρούς (εκτός του ΤΕΙ) και σε διάφορες άλλες θέσεις με την ιδιότητα του Μαθηματικού-Στατιστικού όπως, στατιστικός στον κεντρικό τομέα Στατιστικής και Τεκμηριώσεων της ΔΕΗ, Καθηγητής Μαθηματικών μέσης εκπαίδευσης, Καθηγητής Στατιστικής σε ΙΕΚ και επιμορφωτικά σεμινάρια, Επιστημονικός Συνεργάτης σε πανεπιστημιακές επιχειρησιακές έρευνες για το ΕΚΑΒ-ΕΣΥ, Επιστημονικός Σύμβουλος Εταιρείας Δημοσκοπήσεων. Έχει συμμετάσχει σε διάφορα διεθνή συνέδρια στατιστικής, μαθηματικών και εκπαίδευσης. Είναι τακτικό μέλος του Ε.Σ.Ι. (Ελληνικό Στατιστικό Ινστιτούτο), της ΕΜΕ, της Ελληνικής Εταιρείας Ανάλυσης Δεδομένων, κ.λπ.

Έχει δημοσιεύσει αρκετές εργασίες σε διεθνή έγκυρα επιστημονικά περιοδικά, κυρίως στις περιοχές της Στατιστικής Ανάλυσης Δεδομένων και της Ασαφούς Λογικής, με αρκετές διεθνείς ετεροαναφορές (citations). Έχει διατελέσει Κριτής (Reviewer) σε διάφορα διεθνή επιστημονικά περιοδικά. Είναι συγγραφέας πολλών επιστημονικών βιβλίων και διδακτικών βοηθημάτων όπως, "Γραμμικοί Μετασχηματισμοί Laplace-Fourier-Ζήτα", "Πιθανότητες-Στατιστική", "Διαφορικές Εξισώσεις", "Εφαρμοσμένα Μαθηματικά", "Άλγεβρα Boole", κ.λπ.