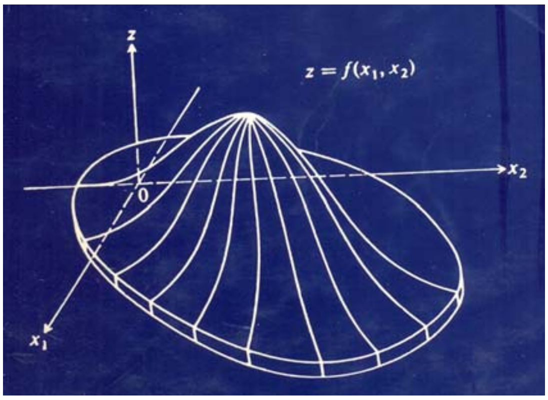
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ-ΙΙ
Μέρος 2ο

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
Διδακτικές Σημειώσεις

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ



Συγγραφέας
Ιωάννης Αθ. Θεοδώρου
Τακτικός Καθηγητής-ΤΕΙ Λαμίας
(Δρ. Μαθηματικός-Στατιστικός)

Κεφάλαιο Α

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΘΕΩΡΙΑΣ

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

1.1. ***Πείραμα τύχης (π.τ.)***-*random variable,* λέμε το πείραμα που όταν επαναλαμβάνεται υπό τις ίδιες συνθήκες μπορεί να δώσει διαφορετικά αποτελέσματα (*στοχαστικά φαινόμενα*), όπως π.χ. η ρίψη ενός ζαριού ή ενός κέρματος, η μέτρηση του ύψους διάφορων μαθητών, το φύλο των γεννήσεων ενός μαιευτηρίου, ο χρόνος ζωής ενός λαμπτήρα, τα ελαττωματικά προϊόντα μιας βιομηχανίας.
Αντίθετα μιλάμε για ***κοινό*** ή ***αιτιοκρατικό πείραμα***, όταν υπό τις ίδιες συνθήκες παράγεται το ίδιο αποτέλεσμα (*αιτιοκρατικά φαινόμενα*), όπως π.χ. στη Φυσική όπου κατά το νόμο του Ohm, I=V/R, όσες φορές και αν επαναληφθεί με V και R σταθερά, θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα I, είτε η πτώση ενός σώματος που προκαθορίζεται ντετερμινιστικά από τους γνωστούς νόμους της βαρύτητας.

Βασική διαφορά μεταξύ των δύο παραπάνω ειδών πειραμάτων είναι ότι, στα πειράματα τύχης οι ίδιες αρχικές συνθήκες δεν προκαθορίζουν το αποτέλεσμα (όπως συμβαίνει στα αιτιοκρατικά πειράματα) αλλά προσδιορίζουν μόνο το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων. Έτσι, σ' αυτή ακριβώς την αδυναμία προκαθορισμού του αποτελέσματος έγκειται το στοιχείο της ***τυχαιότητας*** που χαρακτηρίζει μόνον τα πειράματα τύχης.
Σε όσα ακολουθούν θα ασχοληθούμε αποκλειστικά και μόνο με πειράματα τύχης.

1.2. Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός π.τ. λέγεται ***δειγματοχώρος*** *(sample space)* και συμβολίζεται συνήθως με Ω. Ένα ***ενδεχόμενο ή γεγονός*** *(event)* είναι γενικά ένα υποσύνολο Α του δειγματοχώρου Ω.
Ένα ενδεχόμενο που περιλαμβάνει ένα μόνο στοιχείο του Ω λέγεται ***απλό ενδεχόμενο ή δειγματοσημείο***, π.χ, ρίψη ζαριού (πάνω έδρα), μόνο {1} ή {2}. ***Σύνθετο ενδεχόμενο*** λέγεται αυτό που αποτελείται από δύο τουλάχιστον δειγματοσημεία, π.χ, ρίψη ζαριού, {1,2} ή {2,3,5}.

Εάν ένας δειγματοχώρος έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων π.χ. όπως στη ρίψη ενός ζαριού όπου Ω={1,2,3,4,5,6}, τότε λέγεται ***πεπερασμένος δειγματοχώρος***. Επίσης αν τα στοιχεία ω ενός δειγματοχώρου Ω μπορούν να αντιστοιχηθούν ένα προς ένα με τους φυσικούς αριθμούς, 1,2,3,…, τότε λέγεται ***αριθμήσιμος*** *(ή αριθμησίμως άπειρος)* ***δειγματοχώρος***. Εάν όμως τα σημεία ω ενός δειγματοχώρου Ω μπορούν να αντιστοιχηθούν με τα στοιχεία x ενός συνεχούς υποδιαστήματος των πραγματικών αριθμών π.χ. $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$, τότε λέγεται ***συνεχής*** ή ***μη-αριθμήσιμος δειγματοχώρος***.

Διακρίνουμε λοιπόν ανάλογα με το πλήθος των στοιχείων δύο είδη δειγματοχώρων: τους ***διακριτούς*** ή ***ασυνεχείς δειγματοχώρους*** που έχουν πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων, και τους ***συνεχείς δειγματοχώρους*** που έχουν άπειρο ή μη-αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων.

Π.χ. Οι δειγματοχώροι,
Ω_1={ρίψη δύο ζαριών}={(1,1),(1,2),(2,1),…,(5,6),(6,6)},
Ω_2={ρίψη ενός κέρματος}={Κ,Γ},
Ω_3={αριθμός ελαττωματικών προϊόντων μιας βιομηχανίας}={0,1,2,…,ν},
Ω_4={αριθμός εκπεμπόμενων σωματιδίων από μια ραδιενεργό πηγή}={0,1,2,…},
Ω_5={ο χρόνος ζωής ενός λαμπτήρα}={ $x \geq 0$ },
Ω_6={το βάρος διάφορων μαθητών}={ $20 \leq x \leq 100$ },
είναι:
Ω_1, Ω_2, Ω_3 (πεπερασμένοι), Ω_4 (αριθμήσιμος), Ω_5 και Ω_6 (συνεχής ή μη-αριθμήσιμος), ενώ Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 χαρακτηρίζονται διακριτοί και Ω_5, Ω_6 συνεχείς.

1.3. ***Πληθυσμό*** λέμε στη Στατιστική ένα σύνολο (π.χ. ατόμων όπως των ψηφοφόρων ενός κόμματος, ή αντικειμένων όπως των προϊόντων μιας βιομηχανίας), για το οποίο ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε κάποια χαρακτηριστικά του. Επειδή συχνά είναι δύσκολο ή αδύνατο να μελετήσουμε ολόκληρο τον πληθυσμό, αρκούμαστε συνήθως σε ένα υποσύνολο του πληθυσμού που λέγεται ***δείγμα***.

Ο τρόπος λήψης ενός (τυχαίου) δείγματος από έναν πληθυσμό λέγεται ***δειγματοληψία***. Η δειγματοληψία βασίζεται σε μια μαθηματικά τεκμηριωμένη διαδικασία συλλογής των στοιχείων του δείγματος με καθορισμένες αρχές και μεθόδους (όπως είναι η αντιπροσωπευτικότητα, η τυχαιότητα, η αξιοπιστία, η πληρότητα, η επάρκεια, κ.λπ., του δείγματος) και αποτελεί ιδιαίτερο κλάδο της Στατιστικής (Θεωρία Δειγματοληψίας)..
Για παράδειγμα από το σύνολο του πληθυσμού των 5.000 σπουδαστών του ΑΤΕΙ Λαμίας, ζητάμε να μελετήσουμε το βάρος ή το ύψος τους, εξετάζοντας μόνον 500 από αυτούς (το δείγμα). Ή από τον πληθυσμό των ψαριών του Αιγαίου πελάγους (ή ωκεανού γενικότερα) ζητάμε να συμπεράνουμε για το είδος τους από μια δειγματοληψία 20.000 ψαριών. Είτε από το σύνολο της παραγωγής 10.000 ηλεκτρικών λαμπτήρων ενός εργοστασίου, ζητάμε να αποφανθούμε για την ορθότητα των προδιαγραφών του κατασκευαστή (π.χ. διάρκεια ζωής λαμπτήρα, 800 έως 1000 ώρες) από ένα δείγμα 100 λαμπτήρων.

1.4. Ενδεχόμενα και Σύνολα (Θεωρία Πιθανοτήτων & Θεωρία Συνόλων)

Επειδή τα ενδεχόμενα είναι πάντοτε υποσύνολα ενός δειγματοχώρου Ω, οι ιδιότητες που έχουν τα ενδεχόμενα ενός π.τ. μπορούν να διατυπωθούν ισοδύναμα και στη γλώσσα της Θεωρίας των Συνόλων. Έτσι ο ίδιος ο δειγματοχώρος Ω (που είναι το βασικό σύνολο ή σύνολο αναφοράς) ενός π.τ., είναι ένα ενδεχόμενο που λέγεται ***βέβαιο ενδεχόμενο-γεγονός***, αφού οπωσδήποτε ένα από τα στοιχεία του πραγματοποιείται. Επίσης το κενό σύνολο $\varnothing$ αντιστοιχίζεται στο ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται ποτέ και λέγεται ***αδύνατο ενδεχόμενο-γεγονός***.
Είναι αξιοσημείωτο, ότι ο δειγματοχώρος Ω δεν προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από το π.τ., αλλά εξαρτάται από το τι μας ενδιαφέρει από τα αποτελέσματα του π.τ. Έτσι, αν στο π.τ. της ρίψης 2 ζαριών μας ενδιαφέρει το άθροισμα των αποτελεσμάτων των πάνω εδρών τότε ο δειγματοχώρος είναι Ω={2,3,4,…,12}, ενώ αν καταγράφουμε μόνο τις όψεις τους τότε Ω={(1,1), (1,2), (1,3),…,(6,6)} που έχει 36 στοιχεία.

Ένα ενδεχόμενο μπορεί να «ιδωθεί» και ως μια λογική πρόταση, σχετικά με το αποτέλεσμα του π.τ., (π.χ. το άθροισμα των αποτελεσμάτων των 2 ζαριών, να είναι μεγαλύτερο του 9). Έτσι λέμε ότι ένα ενδεχόμενο πραγματοποιήθηκε ή όχι, ανάλογα με το αν η αντίστοιχη λογική πρόταση είναι αληθής ή ψευδής, όταν εκτελεστεί μια φορά το π.τ. Για την πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τα «ευνοϊκά» αποτελέσματα του π.τ., οπότε «το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 9» αντιστοιχεί στις ζαριές {(4,6), (5,5), (5,6),(6,6), (6,4), (6,5)}, δηλ. αντιστοιχεί σε ένα υποσύνολο A του δειγματοχώρου Ω.

Στο εξής λοιπόν, ***κάθε ενδεχόμενο θα το ταυτίζουμε με το υποσύνολο A του Ω, για το οποίο το ενδεχόμενο πραγματοποιείται*** *(είτε ισοδύναμα, η αντίστοιχη λογική πρόταση είναι αληθής).*

Μπαίνει όμως τώρα και το αντίστροφο ερώτημα:
Κάθε υποσύνολο A του Ω μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα ενδεχόμενο, ή ακόμη είναι χρήσιμο να θεωρηθεί έτσι;
Για να απαντηθεί αυτή η ερώτηση, ***ας υποθέσουμε ότι το σύνολο των ενδεχομένων είναι μια κλάση (μια συγκεκριμένη ας πούμε οικογένεια υποσυνόλων του Ω), έστω F***, της οποίας οικογένειας θα αναζητήσουμε να βρούμε τις ιδιότητες που πρέπει να έχει ώστε να ικανοποιεί τις συνήθεις ανάγκες των πιθανοτήτων (σχετικά δηλ. με το τι μας εξυπηρετεί για την ανάλυση ενός π.τ.).

Έτσι σε ένα τυχαίο πείραμα, ***σε κάθε ενδεχόμενο*** A ***χρειαζόμαστε συχνά και το αντίθετό του, που το συμβολίζουμε συνήθως*** $\overline{A}$ ή A', ***τέτοιο ώστε όταν*** A ***πραγματοποιείται τότε το*** A' ***δεν πραγματοποιείται και αντίστροφα***. (π.χ. στη ρίψη ενός ζαριού, A=(ζυγές ζαριές)={2,4,6} και A'=(μονές ζαριές)={1,3,5}). Άρα συνολοθεωρητικά, το A' εκπροσωπείται μέσα στο Ω από το συμπληρωματικό του σύνολο, δηλ. A^c. Είναι λοιπόν φυσικό (για τις ανάγκες γενικά των π.τ.) να απαιτήσουμε από τη ζητούμενη οικογένεια F να ικανοποιεί την εξής ιδιότητα: Αν $A \in F$ τότε και $A' \in F$.

Επίσης, όταν μας δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B θα μας ενδιέφερε πότε συμβαίνει το ένα από τα δύο, δηλ. συνολοθεωρητικά η ένωσή τους $A \cup B$, ***καθώς και πότε συμβαίνουν και τα δύο ταυτόχρονα, δηλ. συνολοθεωρητικά η τομή τους*** $A \cap B$.
Άρα θα πρέπει η οικογένεια F να ικανοποιεί τις συνθήκες:
Αν $A, B \in F$ τότε και $(A \cup B) \in F$ και $(A \cap B) \in F$, κι' αυτό με ένα γενικό τρόπο, για οποιονδήποτε δηλ. αριθμό ενδεχομένων.

Τέλος, χρειαζόμαστε και ορίζουμε το βέβαιο ενδεχόμενο, που είναι φυσικά το σύνολο των ενδεχομένων και εκπροσωπείται από το βασικό σύνολο ή σύνολο αναφοράς Ω, καθώς και το αδύνατο λογικά ενδεχόμενο που εκπροσωπείται συνολοθεωρητικά από το κενό σύνολο $\varnothing$ (π.χ. στη ρίψη 2 ζαριών, το άθροισμα των 2 ζαριών να είναι 13).

Έτσι γενικότερα στην Πιθανοθεωρία δημιουργούμε μια άλγεβρα-δομή ενδεχομένων που αντιστοιχίζεται στη γνωστή Θεωρία των Συνόλων,
όπου κάνοντας κάποιες βασικές πράξεις με ενδεχόμενα-υποσύνολα του Ω παίρνουμε άλλα ενδεχόμενα-υποσύνολα του Ω, (δηλ. δημιουργούμε μια αλγεβρική δομή, μια «νομοθεσία» που διέπει τα ενδεχόμενα-αντίστοιχα σύνολα).

Πιο συγκεκριμένα, αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα-υποσύνολα του δειγματοχώρου Ω ενός π.τ., ορίζουμε τις εξής 3 βασικές πράξεις-νόμους:

$A' = \overline{A} = A^c$, είναι το αντίθετο ενδεχόμενο του Α, δηλ. A'={δεν συμβαίνει Α},
$A \cup B$ είτε Α+Β, είναι το ενδεχόμενο {συμβαίνει Α ή Β ή και τα δύο}=Ένωση,
$A \cap B$ είτε Α.Β, είναι το ενδεχόμενο {συμβαίνει Α και Β ταυτόχρονα}=Τομή.

Επιπλέον των ανωτέρω τριών βασικών πράξεων που ορίζουμε στα ενδεχόμενα, δημιουργούμε και διάφορες άλλες, όπως,
Α-Β, είναι το ενδεχόμενο {συμβαίνει Α αλλά δεν συμβαίνει Β}, κτλ.

Επίσης αποδίδουμε στα ενδεχόμενα διάφορες ιδιότητες των συνόλων, όπως:

εάν τα σύνολα που αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα Α και Β είναι ξένα δηλ. $A \cap B = \varnothing$, τότε τα ενδεχόμενα αυτά λέγονται ***ξένα ή ασυμβίβαστα ενδεχόμενα*** (δηλ. τα ενδεχόμενα Α και Β δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα, στο ίδιο π.τ.), π.χ. στη ρίψη ζαριού, αν Α είναι οι περιττές όψεις {1,3,5} και Β οι άρτιες {2,4,6} τότε προφανώς $A \cap B = \varnothing$. Προφανώς τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και $\overline{A}$ είναι ασυμβίβαστα.

Έτσι λοιπόν, σύμφωνα με τον παραπάνω τρόπο καταλήγουμε για την εν λόγω οικογένεια-κλάση* F *των υποσυνόλων του* Ω*, ότι πρέπει να ικανοποιεί γενικά τα εξής τρία αξιώματα-νόμους:

i) $A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$,
ii) $A, B \in F \Rightarrow (A \cup B) \in F, \quad \forall A, B \in F$, **(1)**
iii) $\Omega \in F$.

Από τα 3 αυτά αξιώματα αποδεικνύεται πως θα ισχύει επιπλέον:

Για κάθε αριθμήσιμο σύνολο ενδεχομένων, $A_1, A_2, ..., A_i$, ($i \in \mathbb{N}$), με στοιχεία από την κλάση-οικογένεια F, είναι:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in F, \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in F \quad \text{και} \quad \varnothing \in F .$$

Τα παραπάνω 3 αξιώματα ορίζουν μια δομή επί της F, όπου $F \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, που στα Μαθηματικά ονομάζεται *φυλή* ή *σ-άλγεβρα*.

Το δυναμοσύνολο-*Powerset* $\mathcal{P}(\Omega)$, δηλ. το σύνολο όλων των υποσυνόλων του Ω, είναι μια ιδιαίτερη σ-άλγεβρα, η πιο «πλούσια», αλλά δεν είναι πάντα χρήσιμη, ούτε η πιο αποτελεσματική για γενική χρήση στην Πιθανοθεωρία.

1.5. ΈΝΝΟΙΑ, ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Η έννοια *της Πιθανότητας* ξεκίνησε κατά τον 16^{o}-17^{o} αιώνα με αφορμή καταρχήν τα τυχερά παιχνίδια (π.χ. ζάρια), με πρωτοπόρους τους *Pascal, Fermat*, κ.α.
Τα πρώτα βιβλία στις πιθανότητες ήταν του *Cristian Huygens* (1657) και του *James Bernoulli* που εκδόθηκε μετά το θάνατό του (1713).

Ο πρώτος ***κλασικός ορισμός της Πιθανότητας*** θεμελιώθηκε το 1795 από τον *P.S. Laplace* στο βιβλίο του "*Theorie Analytique des Probabilites*", που όμως είχε αρκετές ανεπάρκειες αφού προϋποθέτει τον δειγματοχώρο Ω πεπερασμένο και την πιθανότητα ομοιόμορφη. Σύμφωνα με τον πρώτο αυτόν ορισμό, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α, δίνεται από τη σχέση, $\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$, όπου m οι ευνοϊκές περιπτώσεις να συμβεί το Α και n όλες οι δυνατές περιπτώσεις του π.τ.

Ακολούθησε ο ***στατιστικός ορισμός της Πιθανότητας*** που υπερέβαινε την ομοιόμορφη πιθανότητα (που καθιστούσε ανεπαρκή τον κλασικό ορισμό), μέσω της σχέσης, $\mathrm{P(A)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$. Όμως και αυτός ο ορισμός είχε πολλές αδυναμίες, αφού η επανάληψη ενός π.τ. άπειρες φορές (όπως απαιτεί) είναι πρακτικά ανέφικτη.

Τελικά, η ανάγκη για μια αξιωματική θεμελίωση της πιθανότητας με μαθηματική αυστηρότητα (ο *D. Hilbert*, την είχε συμπεριλάβει στα άλυτα προβλήματα το 1900), οδήγησε στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα στη συσχέτιση των εννοιών της πιθανότητας και του μέτρου (*Borel*), ενώ το 1933 ο ρώσος *Kolmogorov* εφαρμόζοντας τη Θεωρία Μέτρου και Ολοκληρώματος έδωσε τελικά τον σύγχρονο ***αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας***, που έχει ως ακολούθως.

Σε κάθε ενδεχόμενο Α ενός δειγματοχώρου Ω αντιστοιχίζεται ένας πραγματικός αριθμός P(A), που ικανοποιεί τα παρακάτω τρία αξιώματα:

(Ι) $\mathrm{P(A)} \geq 0$,
(ΙΙ) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$, **(2)**
(ΙΙΙ) $\mathrm{P(A \cup B)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)}$, όταν Α,Β ξένα ενδεχόμενα, δηλ. $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.

Στηριζόμενοι στα ανωτέρω τρία αξιώματα του σύγχρονου αξιωματικού ορισμού της πιθανότητας, αποδεικνύεται ότι συνάγονται και διάφορες άλλες ***Ιδιότητες της Πιθανότητας***, όπως:

α) $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right) + \mathrm{P(A')} = 1$
β) $0 \leq \mathrm{P(A)} \leq 1$, $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$
γ) $\mathrm{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)} = \mathrm{P(A_1)} + \mathrm{P(A_2)} + \ldots + \mathrm{P(A_k)}$, όταν τα ενδεχόμενα $\mathrm{A_1, A_2, \ldots, A_k}$, είναι ανά δύο ξένα (γενίκευση της ΙΙΙ) **(3)**
ε) $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{P(A)} \leq \mathrm{P(B)}$
δ) $\mathrm{P(A \cup B)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P(A \cap B)}$ και $\mathrm{P}(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{P(A}_k)$.

(*Απόδειξη*: π.χ. α) Από τη θεωρία των συνόλων έχουμε, $A \cup A' = \Omega$ και $A \cap A' = \varnothing$. Οπότε από το αξίωμα (ΙΙΙ) του ορισμού της πιθανότητας παίρνουμε, $P(A) + P(A') = P(A \cup A') = P(\Omega)$, ενώ από το αξίωμα (Ι) είναι $P(\Omega)=1$. Συνεπώς $P(A) + P(A') = P(A \cup A') = P(\Omega) = 1$).

Συμπερασματικά, οι πιθανότητες θεμελιώνονται πάνω στην τριάδα (Ω,F,P) που λέγεται ***Πιθανοθεωρητικός ή Πιθανοτικός Χώρος***, όπου:

α) Ω είναι ο δειγματοχώρος ενός π.τ.,
β) F είναι η οικογένεια των ενδεχομένων, $F \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$**,**
***γ) P είναι η συνολοσυνάρτηση που σε κάθε ενδεχόμενο $A \in F$ αντιστοιχίζει την πιθανότητα P(A) που ικανοποιεί τα παραπάνω τρία αξιώματα Ι,ΙΙ,ΙΙΙ της* (2).**

Σημείωση (*Θεωρητική Επισκόπηση*)
Από τον παραπάνω αξιωματικό ορισμό της Πιθανότητας (όπου με βάση τη Θεωρία Μέτρου δομείται τελικά η σύγχρονη Θεωρία Πιθανοτήτων), παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα μαθηματικό δημιούργημα-μοντέλο που επιχειρεί στην ουσία να συμβιβάσει τη διαισθητική αντίληψη των πειραμάτων τύχης με τις σύγχρονες συνολοθεωρητικές συναρτήσεις.
Αυτή όμως η διαδοχική αντιστοιχία μεταξύ ***συνόλων-ενδεχομένων-πιθανοτήτων*** παρουσιάζει γενικά κάποιες θεωρητικές δυσκολίες, που σε αυστηρότερα μαθηματικά έχει ως ακολούθως.
Είδαμε ότι, κάθε ενδεχόμενο είναι ένα υποσύνολο του δειγματοχώρου Ω, αλλά όμως δεν ισχύει γενικά και το αντίστροφο (δηλ. κάθε υποσύνολο του Ω δεν είναι πάντα ένα ενδεχόμενο).
Πιο συγκεκριμένα, το αντίστροφο ισχύει μόνον όταν ο δειγματοχώρος Ω είναι διακριτός, ενώ δεν ισχύει όταν Ω είναι συνεχής. Και τούτο συμβαίνει διότι, ο παραπάνω αξιωματικός ορισμός της Πιθανότητας θεμελιώνεται ουσιαστικά σε συμπληρωματικά και ενώσεις ή τομές ενδεχομένων που σχηματίζουν συνολικά την οικογένεια ενδεχομένων F του δειγματοχώρου Ω, όπου F πρέπει να έχει τη δομή μιας *φυλής ή σ-άλγεβρας* επί του Ω (δηλ. η βασική έννοια είναι πρώτα το ενδεχόμενο και ακολουθεί η έννοια του υποσυνόλου που απλά είναι μια συνολοθεωρητική έκφραση του ενδεχομένου).

Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

Φυλή (ή σ-άλγεβρα ή σ-πεδίο) επί του Ω λέγεται μια οικογένεια F υποσυνόλων του Ω δηλ. $F \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, που έχει τις παρακάτω 3 ιδιότητες:
α) $\Omega \in F$,
β) Αν $A \in F$ τότε $\overline{A} \in F$,
γ) Αν $(A_i, i \in \mathbb{N}) \in F$, τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ (και $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$).

Έτσι αν ο δειγματοχώρος Ω είναι διακριτός τότε κάθε υποσύνολό του είναι ένα ενδεχόμενο, γιατί εάν A_i, $(i = 1,2,...)$ είναι μια ακολουθία ενδεχομένων τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ και $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ είναι επίσης ενδεχόμενα.

Εάν όμως Ω είναι συνεχής (π.χ. $\Omega=\mathbb{R}$) τότε υπάρχουν υποσύνολα του Ω που δεν μπορούν να εκφραστούν ως ενώσεις ή τομές ενδεχομένων (π.χ. των όποιων διαστημάτων του $\mathbb{R}$), και κατά συνέπεια δεν μπορεί να τους αντιστοιχηθεί πάντα μια πιθανότητα. Για το λόγο αυτό και επειδή η πιθανότητα κατά Kolmogorov είναι μια ειδική περίπτωση της ***Θεωρίας Μέτρου,*** περιοριζόμαστε (για συνεχή Ω) μόνο στα υποσύνολα του Ω που εκφράζουν ενδεχόμενα δηλ. στα υποσύνολα-διαστήματα που μπορούν να εκφραστούν ως ενώσεις ή τομές ενδεχομένων-διαστημάτων.

Αυτός όμως ο καθαρά θεωρητικός και μόνον από αυστηρής μαθηματικής σκοπιάς περιορισμός, δεν έχει από πρακτικής πλευράς καμιά συνέπεια στις συνήθεις εφαρμογές των Πιθανοτήτων και μπορεί εν πολλοίς να αγνοείται.

Μια αυστηρότερη μαθηματική θεώρηση των πιθανοτήτων ως μια ειδική περίπτωση της Θεωρίας Μέτρου, έχει ως εξής**:**

1) *Μια οικογένεια υποσυνόλων* F, ενός συνόλου Ω, λέγεται ***φυλή*** *(tribu), ή* ***σ-άλγεβρα***, ***ή σ-πεδίο*** *(σ-field)***,** όταν ισχύουν οι ιδιότητες:
i) $A \in F \Rightarrow A' \in F$, (όπου A' το συμπληρωματικό του A, ως προς Ω),

ii) Για ν=1,2,…, $A_\nu \in F \Rightarrow \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \in F$.

Αποδεικνύεται μέσω του παραπάνω ορισμού, ότι σε μια φυλή ή σ-άλγεβρα, επιπλέον ισχύουν:
iii) $\Omega \in F$, αφού $A \cup A' = \Omega$, iv) $\varnothing \in F$, αφού $\Omega' = \varnothing$,

και v) $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \in F$, αφού $(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A'_\nu)' = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$.

Αν η ιδιότητα (ii) απαιτείται μόνον για πεπερασμένο αριθμό ν, τότε η F λέγεται απλά ένα πεδίο ή μια άλγεβρα υποσυνόλων.
Το ζεύγος (Ω,F) λέγεται ένας ***μετρήσιμος χώρος*** *(measurable space)*. Τα στοιχεία μιας σ-άλγεβρας F, λέγονται ***μετρήσιμα σύνολα***. Άρα το $\varnothing$ και το Ω είναι μετρήσιμα σύνολα.

Το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\Omega)$ εκτός του ότι ως γνωστόν είναι μια άλγεβρα Boole ως προς τις συνολοθεωρητικές πράξεις $\cup, \cap$, **,** (ή ισοδύναμα $\subseteq$), αποδεικνύεται ότι είναι και ένα σ-πεδίο.
Το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\Omega)$ είναι μάλιστα το μέγιστο σ-πεδίο υποσυνόλων του Ω, ενώ το ελάχιστο σ-πεδίο είναι αυτό που αποτελείται μόνον από τα στοιχεία $\varnothing$ και Ω (δηλ. 0 και 1, που είναι η γνωστή ***δίτιμη άλγεβρα Boole των Η/Υ***). Η τομή σ-πεδίων αποδεικνύεται ότι είναι επίσης ένα σ-πεδίο. Για κάθε οικογένεια υποσυνόλων F ενός συνόλου Ω, υπάρχει πάντα ένα ελάχιστο σ-πεδίο, που περιέχει την οικογένεια F.
Όταν $\Omega = \mathbb{R}$, τότε το σ-πεδίο που παράγεται από την οικογένεια όλων των ανοικτών υποσυνόλων-υποδιαστημάτων του $\mathbb{R}$, λέγεται ***πεδίο (ή σ-άλγεβρα) του Borel,*** συμβολιζόμενο συνήθως $\mathcal{B}$.

2) Ονομάζουμε ***μέτρο***, ενός μετρήσιμου χώρου (Ω,F), μια συνάρτηση

$$\mu: F \to [0, \infty),$$

με την εξής ιδιότητα,

$$\mu(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(A_\nu), \tag{i}$$

όπου A_ν, ν=1,2,…, είναι μια ακολουθία, ξένων μεταξύ τους ανά 2 στοιχείων του F.

Η τριάδα (Ω,F,μ) λέγεται ένας ***μετρικός χώρος*** *(measure space)*.
Η ιδιότητα (i) λέγεται ***σ-προσθετικότητα*** *(σ-additivity)*. Αν τα A_ν είναι πεπερασμένου πλήθους ν, τότε αυτή η ιδιότητα λέγεται απλά προσθετικότητα.

Από τον ορισμό του μέτρου, προκύπτουν επιπλέον οι ιδιότητες:
α) $\mu(\varnothing)=0$, (αφού αν $A \in F$, τότε $A = A \cup \varnothing$, οπότε από την (I) προκύπτει:

$$\mu(A) = \mu(A \cup \varnothing) = \mu(A) + \mu(\varnothing) \Rightarrow \mu(\varnothing) = 0).$$

β) Αν $A, B \in F$, με $A \subseteq B$, τότε $\mu(A) \le \mu(B)$.

(Για περισσότερα στη Θεωρία Μέτρου, βλ. π.χ. *"Ε. Κ. Υφαντής, Εισαγωγή στη ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών")*.

3) Στον μετρήσιμο χώρο ($\mathbb{R},\mathcal{B}$), το μέτρο μ που ορίζεται στο ανοιχτό διάστημα (α,β)$\subseteq \mathbb{R}$ ως εξής, **μ((α,β))=β-α**, λέγεται ***μέτρο Lebesgue*** στο $\mathbb{R}$.

Όταν μ(Ω)=1, τότε τα μέτρο μ λέγεται ***μέτρο πιθανότητας*** συμβολίζεται ιδιαίτερα με P και ο μετρικός χώρος (Ω,F,μ=P) ονομάζεται ιδιαίτερα ***πιθανοτικός χώρος***.

Οι πιθανοτικοί χώροι (Ω,F,μ=P) χρησιμοποιούνται ως μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή πειραμάτων τύχης.

Τα πιθανοτικά μέτρα στον μετρήσιμο χώρο ($\mathbb{R},\mathcal{B}$), ορίζονται ως ***συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας*** *(probability density functions-**pdf**)*,
δηλ.

$f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$, τέτοιες ώστε, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Το αντίστοιχο πιθανοτικό μέτρο δίνεται μέσω της $\mu_f(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f(x)dx$, για $\mathrm{A}\in\mathcal{B}$.

Στην Πιθανοθεωρία, το Ω είναι ο δειγματοχώρος δηλ. το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης, ενώ το F είναι *το σύνολο όλων των ενδεχομένων* δηλ. *το σύνολο των μετρήσιμων συνόλων*.

Σύνοψη:
Εάν ο δειγματικός χώρος Ω είναι διακριτός (πεπερασμένος ή αριθμήσιμος) τότε κάθε υποσύνολό του δηλ. κάθε στοιχείο του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(\Omega)$ είναι ένα ενδεχόμενο, (δηλ. $\mathrm{F} = \mathcal{P}(\Omega)$),

οπότε προφανώς, αν A_i, i=1,2,…, είναι μια ακολουθία ενδεχομένων τότε η ένωσή τους $\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathrm{A}_i$,

καθώς και η τομή τους $\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathrm{A}_i$, είναι επίσης ενδεχόμενα (δηλ. είναι μετρήσιμα σύνολα).

Εάν όμως ο δειγματικός χώρος Ω είναι συνεχής (π.χ. υποδιάστημα είτε όλη η ευθεία γραμμή του $\mathbb{R}$), τότε υπάρχουν υποσύνολα του Ω που δεν μπορούν να εκφραστούν ως ενώσεις ή τομές ενδεχομένων (π.χ. των όποιων διαστημάτων του $\mathbb{R}$), οπότε η οικογένεια των ενδεχομένων F είναι γενικά υποσύνολο του δυναμοσυνόλου, δηλαδή $\mathrm{F}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$.

Έτσι στην Πιθανοθεωρία για τη δημιουργία ενός ομοιόμορφου συστήματος αξιωμάτων (ανεξαρτήτως αν το Ω είναι διακριτό ή συνεχές σύνολο), περιορίζουμε την έννοια "ενδεχόμενο ή γεγονός" έτσι ώστε να μην αναφέρεται σε κάθε υποσύνολο του Ω, αλλά μόνον σ' εκείνα τα μετρήσιμα υποσύνολα του Ω που μπορούν να εκφραστούν ως ενώσεις ή τομές ενδεχομένων-"διαστημάτων του $\mathbb{R}$".

Συνεπώς ένας πιθανοτικός χώρος (Ω,F,P), (σύμφωνα με τον θεμελιωτή της σύγχρονης Πιθανοθεωρίας, ***Kolmogorov***), πρέπει να ικανοποιεί τα εξής τρία αξιώματα:

(I) $\mathrm{P(A)} \geq 0$, $\forall\, \mathrm{A}\in\mathrm{F}$,

(II) P(Ω)=1, και

(III) $\mathrm{P}(\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\mathrm{A}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\mathrm{P}(\mathrm{A}_\nu)$,

όπου A_ν, ν=1,2,…, είναι μια ακολουθία, ξένων μεταξύ τους ανά 2 στοιχείων του F.

Έτσι, η πιθανότητα P ορίζεται γενικά ως μια συνολοσυνάρτηση με πεδίο ορισμού το $F \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ και τιμές στο [0,1],

$$P: A \in F \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \to P(A) \in [0,1],$$

δηλ. αν θεωρήσουμε ένα πείραμα τύχης με αντίστοιχο δειγματοχώρο Ω και σύνολο ενδεχομένων (μετρήσιμων συνόλων) $F \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, τότε η πιθανότητα-μέτρο P είναι μια συνάρτηση, που ικανοποιεί τα παραπάνω τρία αξιώματα.

Τέλος, τα ανωτέρω 3 αξιώματα (I,II,III) δεν μας προσδιορίζουν τις πιθανότητες των διάφορων ενδεχομένων ενός πειράματος τύχης, αλλά απλά καθορίζουν τους νόμους δηλ. τα πλαίσια εντός των οποίων μπορούν να οριστούν αυτές οι πιθανότητες.
(Με χρήση της μαθηματικής λογικής μπορούμε να ορίζουμε τις πιθανότητες των ενδεχομένων, αφού κάθε ενδεχόμενο μπορεί να εκφραστεί από μια λογική πρόταση, αρκεί να μην παραβιάζονται τα παραπάνω αξιώματα).

1.6. ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ή ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Έστω ένα π.τ. με δειγματοχώρο Ω (διακριτό ή συνεχή) και έστω ένα ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$, με P(A)>0.
Ονομάζουμε ***δεσμευμένη ή υπό συνθήκη πιθανότητα*** ενός οποιουδήποτε ενδεχομένου $B \subseteq \Omega$, όταν ήδη έχει συμβεί το A, και τη συμβολίζουμε P(B/A), τη συνάρτηση-σχέση που ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B) = P(AB)}{P(A)}} \qquad \textbf{(4)}$$

Σχετικά ισχύουν οι ιδιότητες:

$$P(A/A) = 1, \quad P(\varnothing/A) = 0, \quad P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B/C),$$
$$P(AB) = P(A)P(B/A), \text{ ενώ } \quad P(A/B \cup C) \neq P(A/B) + P(A/C).$$

Π.χ. Από μια τράπουλα με 52 χαρτιά, τραβάμε τυχαία ένα χαρτί. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι «ντάμα» αν είναι ήδη γνωστό ότι είναι «φιγούρα»;
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα, A={το χαρτί είναι ντάμα} και B={το χαρτί είναι φιγούρα}. Οπότε εδώ έχουμε, $P(A/B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{1}{3}$, αφού $P(A)=\frac{4}{52}$, $P(B)=\frac{12}{52}$.

1.7. ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ, ΘΕΩΡΗΜΑ BAYES

Καταρχήν ονομάζουμε ***διαμέριση*** ενός δειγματοχώρου Ω, εκείνα τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n \neq \varnothing$, τέτοια ώστε,
$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$, και ανά ζεύγη ξένα $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Έστω λοιπόν Ω ο δειγματοχώρος ενός π.τ. και δ={$A_1, A_2, \ldots, A_n$) μια διαμέριση του Ω, με $P(A_i)>0$. Τότε για οποιοδήποτε ενδεχόμενο B του Ω, ισχύει:

a) ***Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας***

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)P(B/A_n)=$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i), \qquad \textbf{(5)}$$

Το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (ΘΟΠ) εφαρμόζεται όταν ένα ενδεχόμενο B δεν μπορεί να υπολογιστεί απευθείας, αλλά υπολογίζεται σε σχέση με άλλα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$, έτσι ώστε η πιθανότητα να συμβεί το B εξαρτάται ποιο από τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$, συνέβη.

Παράδειγμα (στο ΘΟΠ)*:* Έστω δυο κιβώτια που περιέχουν 40 ηλεκτρονικά εξαρτήματα το καθένα, μερικά από τα οποία είναι ελαττωματικά. Εκτιμούμε ότι 6 ελαττωματικά υπάρχουν στο 1^o κιβώτιο και 4 στο 2^o κιβώτιο. Επιλέγουμε ένα από τα 2 κιβώτια στη τύχη και ακολούθως επιλέγουμε τυχαία ένα από τα εξαρτήματα που περιέχονται σ' αυτό. Ποιά είναι η πιθανότητα ώστε το εξάρτημα αυτό να μην είναι ελαττωματικό;

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: A_1={επιλογή 1ου κιβώτιου}, A_2={επιλογή 2ου κιβώτιου}, B={επιλογή μη-ελαττωματικού εξαρτήματος}.

Ζητείται η πιθανότητα P(B), η οποία σύμφωνα με το ΘΟΠ θα είναι: $P(B)=P(A_1).P(B/A_1)+P(A_2).P(B/A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{34}{40}+\frac{1}{2}\cdot\frac{36}{40}=\frac{7}{8}$,
αφού $P(A_1)=\frac{1}{2}$, $P(A_2)=\frac{1}{2}$, $P(B/A_1)=\frac{34}{40}$, $P(B/A_2)=\frac{36}{40}$.

b) ***Θεώρημα Bayes***

Αν τα ενδεχόμενα $\{A_1, A_2,\ldots,A_n\}$ αποτελούν μια διαμέριση δ του δειγματοχώρου Ω, με $P\left(A_i\right)>0,\ i=1,2,...,n$, και B ένα ενδεχόμενο του Ω με P(B)>0,
τότε η πιθανότητα του A_r, $r\in\{1,2,...,n\}$, δοθέντος του γεγονότος B, είναι:

$$P(A_r/B)=\frac{P(A_r)P(B/A_r)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)} \tag{6}$$

Απόδειξη:
Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, (4), είναι,
$P(A_r/B)=\frac{P(A_rB)}{P(B)}$ και $P(B/A_r)=\frac{P(A_rB)}{P(A_r)}$ ή $P(A_rB)=P(A_r)P(B/A_r)$, οπότε:
$P(A_r/B)=\frac{P(A_rB)}{P(B)}=\frac{P(A_r)P(B/A_r)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)}$, αφού από το ΘΟΠ έχουμε $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)$.

Παρατηρήσεις *(στον τύπο Bayes):*

a) Ο τύπος του Bayes που παράγεται από τον συνδυασμό της δεσμευμένης πιθανότητας και του ΘΟΠ, συνδέει την πιθανότητα $P(A_r)$, που γνωρίζουμε πριν κάνουμε το π.τ. γι' αυτό και λέγεται *«εκ των προτέρων-a priori»*, με τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(A_r/B)$, που έχουμε για το ενδεχόμενο A_r αφού ξέρουμε ότι συνέβη το B (δηλ. μετά την εκτέλεση του π.τ.) γι' αυτό και λέγεται *«εκ των υστέρων-a posteriori»* πιθανότητα. Με άλλα λόγια το Θεώρημα-τύπος του Bayes μας επιτρέπει να μεταβάλλουμε την εκτίμησή μας ως προς την πιθανότητα ενός ενδεχομένου, σε σχέση με μια νέα πληροφορία (B). Έτσι μπορούμε να περάσουμε από πιθανότητες *a priori*, σε πιθανότητες *a posteriori*.

b) Η πιο συνήθης περίπτωση εφαρμογής στην πράξη του τύπου Bayes (όπως και του ΘΟΠ) είναι για n=2, δηλ. όταν A_1=A και $A_2=\overline{A}$ που αποτελούν προφανώς μια διαμέριση του Ω. Τότε για τον τύπο του Bayes έχουμε:

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)}=\frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A)+P(\overline{A})P(B/\overline{A})}, \tag{7}$$

και το ΘΟΠ απλουστεύεται: $P(B)=P(A)P(B/A)+P(\overline{A})P(B/\overline{A})$, **(8)**
ενώ ισχύει, $P(\overline{A}/B)=1-P(A/B)$, $P(\overline{A})=1-P(A)$.

c) Ο τύπος του Bayes είναι μια ξεχωριστή περίπτωση στην Πιθανοθεωρία, όχι μόνον λόγω των φιλονικιών που προκάλεσε η εφαρμογή του (που άπτεται της αμφιλεγόμενης έννοιας της *υποκειμενικής πιθανότητας*), αλλά και γιατί αποτελεί τη βάση ενός ιδιαίτερου κλάδου που λέγεται *Στατιστική του Bayes*.
Το Θεώρημα-τύπος Bayes λέγεται και «*Θεώρημα της πιθανότητας των αιτίων»,* ενώ η γενική εφαρμογή του κατά το παρελθόν αντιμετώπισε βίαιη κριτική εκ μέρους κυρίως των «λογικιστών», σύμφωνα με τους οποίους οι έννοιες (που συνδέει το Θεώρημα) τυχαιότητα και αιτιότητα, είναι έννοιες αντιφατικές.
Αν και από μαθηματικής πλευράς δεν υπάρχει τίποτα το αμφιλεγόμενο, οι δυσκολίες αφορούν στη φιλοσοφική ερμηνεία του και στο κατά πόσο μπορούμε λογικά να ορίσουμε πιθανότητες σε εκ των υστέρων υποθέσεις. Έτσι ερμηνεύουμε π.χ. την πιθανότητα να έχει κάποιος καρκίνο δοθέντος ότι καπνίζει και αν είναι μεγάλη να αποφανθούμε ότι το κάπνισμα είναι η αιτία του καρκίνου, αλλά και αντιστρόφως (αιτιοκρατικά) ότι ο καρκίνος προκαλεί το κάπνισμα. Προφανώς τέτοιες υποκειμενικές ερμηνείες είναι επιστημονικά αστήρικτες και επικίνδυνες. Ο Πλάτων χρησιμοποίησε τέτοια επιχειρήματα για να δείξει την ύπαρξη της Ατλαντίδας, όπως και διάφοροι φιλόσοφοι για να διακωμωδήσουν τη Μηχανική του Νεύτωνα. Οι μεταφυσικές όμως εφαρμογές και αιτιοκρατικές ερμηνείες του (πιθανοθωρητικού) τύπου του Bayes είναι πράγματι από μαθηματική σκοπιά εντελώς αβάσιμες.
Από τις τρέχουσες εφαρμογές του Θεωρήματος Bayes σημειώνουμε:
στη Διαγνωστική Ιατρική (οι πιθανότητες γι' αυτή ή την άλλη πάθηση, μετά τη λήψη των αποτελεσμάτων των εργαστηριακών εξετάσεων), στη Μετεωρολογία (στην πρόβλεψη χιονοπτώσεων, μετά τη λήψη πρόσθετων δεδομένων), στην Οικονομία (στον προσδιορισμό του κινδύνου πτώχευσης επιχειρήσεων, μετά από παρατηρήσεις ορισμένων αποτυχιών), στη Βιομετρία, Θεωρία Επικοινωνιών.
Τέλος για την ιστορία ας σημειωθεί ότι το Θεώρημα οφείλεται στον άγγλο μαθηματικό-φιλόσοφο *Thomas Bayes (1702-1761),* που όμως οι σχετικοί τύποι δημοσιεύτηκαν μετά τον θάνατό του (1763) και τελειοποιήθηκαν αργότερα από τον Laplace. Αυτή η κάπως παράδοξη μεταθανάτια δημοσίευση του έργου του *Bayes*, οφείλεται κατά μια ερμηνεία στον φόβο του Bayes για την Ιερά Εξέταση της εποχής του. Και τούτο γιατί ο Bayes ήταν Εκκλησιαστής και η ερμηνεία του θεωρήματός του για την έρευνα των εκ των υστέρων αιτίων ενός ενδεχομένου, θα μπορούσε να οδηγήσει στην πιθανοθεώρηση της ύπαρξης του Θεού (δηλ. στην αμφισβήτησή του, με τις γνωστές συνέπειες από την Ιερά Εξέταση της εποχής).

Παραδείγματα

1) Η πιθανότητα σωστής διάγνωσης του καρκίνου της μήτρας με το τεστ Παπανικολάου είναι 0,95. Αν το ποσοστό των γυναικών που πάσχουν απ' αυτή την ασθένεια είναι 0,0001, ποια είναι η πιθανότητα για μια υποψήφια άρρωστη για την οποία το τεστ είναι θετικό να πάσχει πράγματι από αυτή την αρρώστια;

Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: A={πράγματι άρρωστη}, B={το τεστ θετικό}.

Ζητείται η πιθανότητα P(A/B), η οποία σύμφωνα με το Θεώρημα Bayes δίνεται από τον τύπο:

$$P(A/B)=\frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A)+P(\overline{A})P(B/\overline{A})},$$

όπου $P(A)=0{,}0001$, $P(\overline{A})=0{,}9999$, $P(B/A)=\frac{95}{100}$, $P(B/\overline{A})=\frac{5}{100}$.

Άρα, $P(A/B)=\frac{(0{,}95)(0{,}0001)}{(0{,}95)(0{,}0001)+(0{,}05)(0{,}9999)}=0{,}0001$.

2) Ας υποθέσουμε ότι σε ένα συρτάρι υπάρχουν ανακατεμένα 150 γραπτά, 40 της τάξης T_1, 50 της τάξης T_2 και 60 της τάξης T_3. Από τα γραπτά αυτά γνωρίζουμε ότι κάτω από τη βάση είναι, το 15% της T_1, το 20% της T_2 και το 10% της T_3.

Παίρνουμε ένα γραπτό κατά τύχη από το συρτάρι.

α) Ποια είναι η πιθανότητα το γραπτό να έχει βαθμό κάτω από τη βάση.

β) Αν το γραπτό έχει βαθμό κάτω από τη βάση, ποια είναι η πιθανότητα το γραπτό αυτό να ανήκε στην T_1.

Λύση

Ορίζουμε καταρχήν τα ενδεχόμενα που μας ενδιαφέρουν στο πρόβλημα, δηλ.:

A_i={Το γραπτό είναι της τάξης T_i}, i=1,2,3.

B={Το γραπτό έχει βαθμό κάτω από τη βάση}.

α) Ζητάμε την $P(B)$, ενώ έχουμε:

$$P(A_1) = \frac{40}{150}, \quad P(A_2)=\frac{50}{150}, \quad P(A_3)=\frac{60}{150},$$

και

$$P(B / A_1) = \frac{15}{100}, \quad P(B / A_2) = \frac{20}{100}, \quad P(B / A_3) = \frac{10}{100}.$$

Τότε κατά το ΘΟΠ, είναι:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i),$$

δηλ. εδώ,

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)=\frac{40}{150}\frac{15}{100}+\frac{50}{150}\frac{20}{100}+\frac{60}{150}\frac{10}{100}=\frac{22}{150}\simeq 0,147.$$

β) Ζητάμε την $P(A_1 / B)$, οπότε κατά το Θεώρημα Bayes έχουμε,

$$P(A_r/B)=\frac{P(A_r)P(B/A_r)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)},$$

δηλ. εδώ,

$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)} = \frac{\frac{40}{150}\cdot\frac{15}{100}}{\frac{22}{150}} = \frac{6}{22} \simeq 0,273.$$

Ας σημειωθεί ότι η a priori πιθανότητα του A_1 είναι, $\frac{40}{150} \simeq 0,267$.

1.8. ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ- ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ ΤΥΧΗΣ

1. Έστω P μια πιθανότητα ορισμένη σε έναν δειγματοχώρο Ω. Δύο ενδεχόμενα A, B του Ω λέγονται ***ανεξάρτητα*** αν και μόνον αν, ισχύει:

$$\boxed{P(AB) = P(A)P(B)} \qquad \textbf{(9)}$$

Παρατήρηση

Αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, τότε αποδεικνύεται ότι και τα ενδεχόμενα A και B' είναι ανεξάρτητα, όπως και τα ενδεχόμενα A' και B, καθώς και τα A' και B'.

Δεν πρέπει όμως να γίνεται σύγχυση μεταξύ των ανεξάρτητων ενδεχομένων (όπου η πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα του άλλου) και των ασυμβίβαστων ή ξένων ενδεχομένων (όπου η πραγματοποίηση του ενός εμποδίζει την πραγματοποίηση του άλλου).

Δηλ. έχουμε: $A \cap B = AB = \varnothing$***, (ασυμβίβαστα ή ξένα ενδεχόμενα)***

ενώ, $P(A \cap B) = P(AB) = P(A)P(B)$***, (ανεξάρτητα ενδεχόμενα)***

και προφανώς, γενικά ισχύει:

(ασυμβίβαστα ή ξένα ενδεχόμενα) ≠ (ανεξάρτητα ενδεχόμενα). **(10)**

Εξάλλου από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι κάθε γεγονός A είναι ανεξάρτητο με το αδύνατο γεγονός $\varnothing$ και με το βέβαιο γεγονός Ω.

Παράδειγμα ανεξάρτητων ενδεχομένων

Ένα ζάρι ρίχνεται δυο φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει 2 στην α' ρίψη και 3 στη β';

Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A={έρχεται 2 στην α' ρίψη} και B={έρχεται 3 στη β' ρίψη}.

Ζητείται η $P(A \cap B)$.

Προφανώς τα ενδεχόμενα A,B είναι ανεξάρτητα (αφού το τι θα έρθει στη μία ρίψη δεν εξαρτάται από τι θα έρθει στην άλλη).

Επομένως, θα ισχύει η σχέση $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, όπου $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$.

Άρα, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

2. Γενικεύοντας την έννοια της Ανεξαρτησίας ενδεχομένων, έχουμε:

Τρία ενδεχόμενα Α,Β,Γ, λέγονται ***πλήρως ανεξάρτητα*** αν ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(A \cap \Gamma) = P(A)P(\Gamma), \quad P(B \cap \Gamma) = P(B)P(\Gamma),$$

και

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma). \qquad \textbf{(11)}$$

Γενικότερα, ***n ενδεχόμενα*** A_i, $(i = 1,...,n)$ λέγονται ***πλήρως ανεξάρτητα***, αν για οποιοδήποτε k $(1 < k \leq n)$ από τα ενδεχόμενα αυτά $A_{i1}, A_{i2},..., A_{ik}$, ισχύει:

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap ... \cap A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2})...P(A_{ik}), \qquad \textbf{(12)}$$

για κάθε συνδυασμό $\{i_1, i_2,…, i_k\}$ των n δεικτών $\{1,2,…, n\}$ ανά k και για κάθε k=2,3,…,n.

Μπορεί να έχουμε ανεξαρτησία n ενδεχομένων κατά ζεύγη, χωρίς όμως να έχουμε πλήρη ανεξαρτησία,

Π.χ.
Έστω δύο διαδοχικές ρίψεις ενός συνήθους κύβου και έστω A_1 το ενδεχόμενο εμφάνισης άρτιου αριθμού στην πρώτη ρίψη, A_2 το ενδεχόμενο εμφάνισης άρτιου αριθμού στη δεύτερη ρίψη, και A_3 το ενδεχόμενο το άθροισμα των αριθμών που εμφανίζονται στις δύο ρίψεις να είναι άρτιος αριθμός.
Τότε αποδεικνύεται ότι τα ενδεχόμενα A_1, A_2 και A_3 είναι κατά ζεύγη ανεξάρτητα, αλλά δεν είναι πλήρως ανεξάρτητα, δηλ.

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2),\ P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3),\ P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3),$$

ενώ

$$P(A_1A_2A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

3. Τέλος, δύο πειράματα τύχης Π_1, Π_2, λέγονται ανεξάρτητα, αν δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα Γ_1, Γ_2, των δειγματοχώρων τους Ω_1, Ω_2, αντίστοιχα, είναι ανεξάρτητα.

Ανάλογα γενικεύουμε και μιλάμε για ***n ανεξάρτητα πειράματα τύχης,*** Π_i, (i=1,…,n).

2. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

2.1. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗ ΑΡΧΗ

Πολλά μαθηματικά προβλήματα, όπως αυτά που προκύπτουν συχνά στις εφαρμογές της Θεωρίας Πιθανοτήτων, ανάγονται σε προβλήματα υπολογισμού του πλήθους των στοιχείων ενός αριθμήσιμου συνόλου, όπως π.χ. πόσες διαφορετικές 5-άδες χαρτιών μπορεί να πάρουμε από μια δέσμη 32 χαρτιών (πόκερ), ή κατά πόσους τρόπους μπορούν να διανεμηθούν 5 ερευνητικά φάρμακα σε ισάριθμους ασθενείς.

Τέτοια προβλήματα απαρίθμησης απασχολούν έναν ιδιαίτερο κλάδο των μαθηματικών που λέγεται ***Συνδυαστική Ανάλυση*** *(Combinatorial Analysis),* βασικά στοιχεία της οποίας (*Διατάξεις, Μεταθέσεις, Συνδυασμοί*) θα γνωρίσουμε εδώ.

Καταρχήν, ας δούμε τη λεγόμενη ***Βασική Αρχή Απαρίθμησης Γινομένου ή Πολλαπλασιαστική Αρχή*** που έχει ως ακολούθως.

Έστω ότι ένα έργο Ε μπορεί να εκτελεστεί με τη διεξαγωγή των υποέργων E_1, $E_2,\dots, E_\nu$, και ότι το κάθε υποέργο μπορεί ας πούμε να γίνει, κατά κ_1 διαφορετικούς τρόπους το E_1, κατά κ_2 το E_2, κτλ, και κατά κ_ν διαφορετικούς τρόπους το E_κ. Τότε, το τελικό έργο Ε μπορεί να γίνει, κατά $\kappa=\kappa_1.\kappa_2 \dots \kappa_\nu$ διαφορετικούς τρόπους συνολικά.

Απόδειξη:

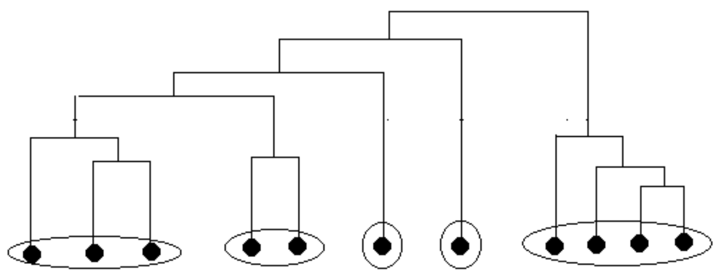
Αν $\nu=2$, δηλ. έχουμε δύο σύνολα E_1, E_2 , με $E_1=(\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_{\kappa 1})$ και $E_2=(\beta_1, \beta_2,\dots, \beta_{\kappa 2})$, τότε ένα στοιχείο α_i, $(i=1, 2,..., \kappa_1)$ του E_1 μαζί με κάθε στοιχείο του E_2 δίνει προφανώς κ_2 ζεύγη $(\alpha_i, \beta_1), (\alpha_i, \beta_2),\dots, (\alpha_i, \beta_{\kappa 2})$. Συνεπώς τα κ_1 στοιχεία του E_1 δίνουν $\kappa=\kappa_1.\kappa_2$ ζεύγη. Γενικεύοντας για $\nu>2$, βρίσκουμε $\kappa=\kappa_1.\kappa_2 \dots \kappa_\nu$.

Παραδείγματα

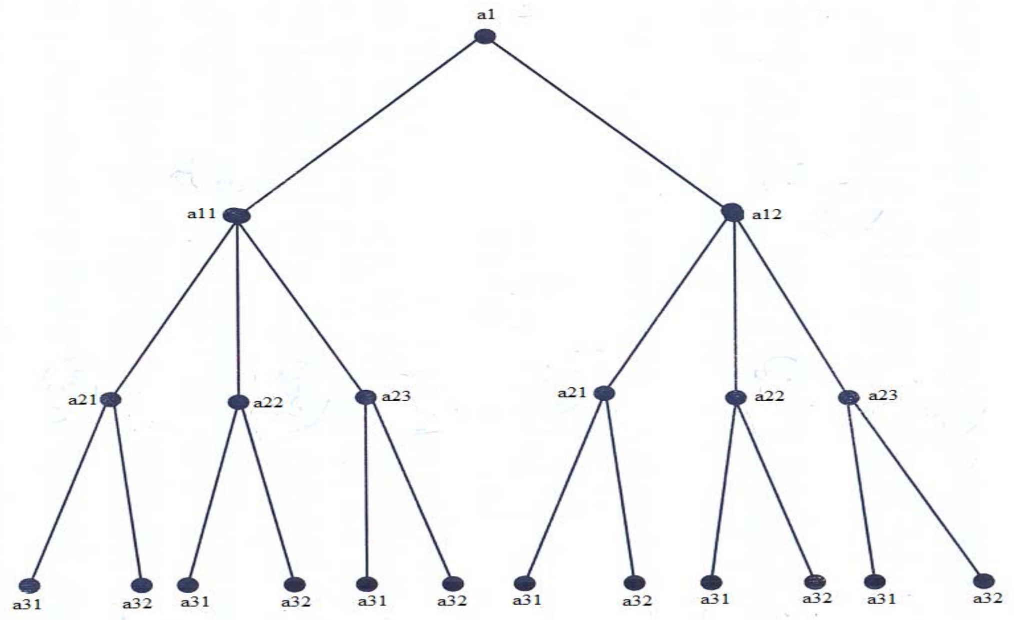
1) Μια σπουδάστρια έχει 5 μπλούζες, 6 φούστες και 4 ζευγάρια παπούτσια. Κατά πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί;
Η απάντηση δίνεται από την Πολ/κή Αρχή, δηλ. ότι μπορεί να ντυθεί κατά 5.6.4=120 διαφορετικούς τρόπους.

2) Έστω ότι πρόκειται να επιλέξουμε 3 στοιχεία-αντικείμενα, α_1, α_2, α_3. Αν το πρώτο στοιχείο α_1 μπορεί να επιλεγεί κατά $\kappa_1=2$ τρόπους $(\alpha_{11}, \alpha_{12})$, το δεύτερο α_2 μπορεί να επιλεγεί κατά $\kappa_2=3$ τρόπους $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$ και το α_3 μπορεί να επιλεγεί κατά $\kappa_3=2$ τρόπους $(\alpha_{31}, \alpha_{32})$, τότε υπάρχουν $\kappa_1.\kappa_2.\kappa_3=2.3.2=12$ διαφορετικοί τρόποι επιλογής.

Συχνά επίσης για να βρούμε τους διαφορετικούς τρόπους σύμφωνα με την παραπάνω Αρχή-Θεώρημα, διευκολύνει η δημιουργία ενός ***δενδρογράμματος*** *(tree diagram)*, όπως γενικά, το ακόλουθο:



Στο παρόν παράδειγμα, το αντίστοιχο δενδροδιάγραμμα έχει ως ακολούθως:



3) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί ένα δημοτικό συμβούλιο 25 μελών να εκλέξει έναν Πρόεδρο και έναν Αντιπρόεδρο;

Λύση

Αφού ο Πρόεδρος μπορεί να εκλεγεί από 25 επιλογές και ο Αντιπρόεδρος ακολούθως από 24 επιλογές, άρα κατά την Πολ/κή Αρχή το δημοτικό συμβούλιο έχει συνολικά (25).(24)=600 διαφορετικές δυνατότητες-επιλογές.

4) Υποψήφιοι αγοραστές αυτοκινήτου διαπιστώνεται στατιστικά ότι για την αγορά εξετάζουν κυρίως τα εξής βασικά χαρακτηριστικά του αυτοκινήτου:

α) Την τιμή του, αξιολογώντας την ως, ακριβή, μέτρια, φτηνή, έστω (E_1, E_2, E_3),

β) Τις τεχνικές επιδόσεις του, κρίνοντας ότι είναι, καλές, κακές, έστω (P_1, P_2),

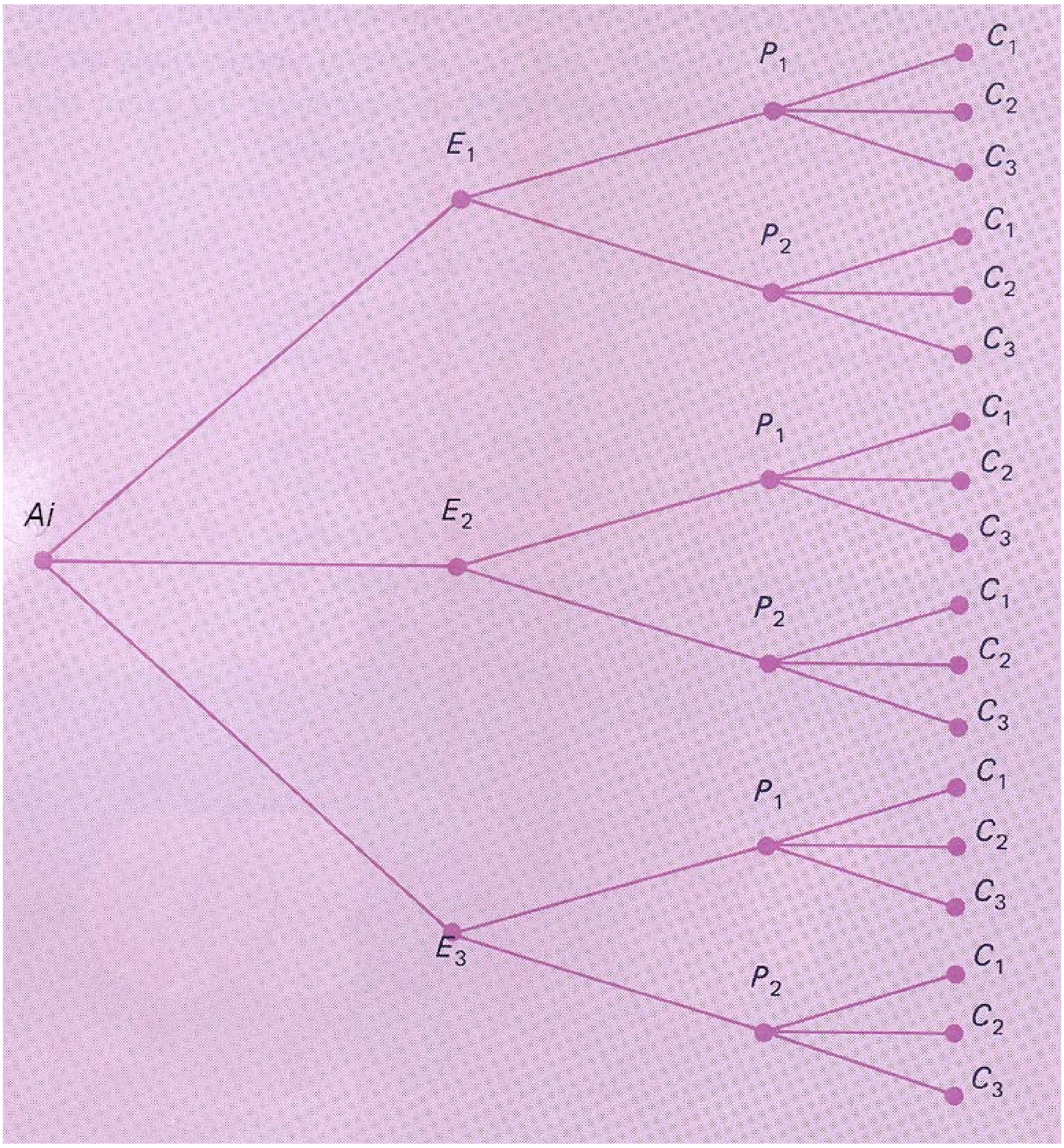
γ) Την επισκευή του, αξιολογώντας την ως, εύκολη, μέτρια, δύσκολη, έστω (C_1, C_2, C_3),.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί ένας υποψήφιος αγοραστής να εκτιμήσει ένα αυτοκίνητο;

Λύση

Κατά την Πολ/κή Αρχή, εδώ είναι $\kappa_1=3$, $\kappa_2=2$, $\kappa_3=3$, οπότε έχουμε συνολικά $\kappa=\kappa_1\ \kappa_2\ \kappa_3=3.2.3=18$ δυνατότητες για διαφορετικούς τρόπους.

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να βρούμε και από το αντίστοιχο δενδροδιάγραμμα, που εδώ έχει ως ακολούθως.



Ai
E_1
E_2
E_3
P_1
P_2
P_1
P_2
P_1
P_2
C_1
C_2
C_3
C_1
C_2
C_3
C_1
C_2
C_3
C_1
C_2
C_3
C_1
C_2
C_3
C_1
C_2
C_3

2.2. ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα:
Έστω 3 ταξιδιώτες σε μια πόλη με 4 ξενοδοχεία. Κατά πόσους τρόπους μπορούν να διανυκτερεύσουν ο καθένας και σε διαφορετικό ξενοδοχείο;

Προφανώς στο πρόβλημα έχει σημασία, εκτός από τον αριθμό των ξενοδοχείων και η σειρά δηλ. η διάταξη που θα διανυκτερεύσουν οι ταξιδιώτες σε κάθε ξενοδοχείο.

Έτσι, αν συμβολίσουμε τα ξενοδοχεία Α, Β, Γ, Δ, και τους ταξιδιώτες 1, 2, 3, τότε η αντιστοιχία (Α1, Β2, Γ3) είναι προφανώς διάφορη της (Α2, Β1, Γ3), κτλ.
Οπότε, ο (1) διαλέγοντας ας πούμε πρώτος, έχει 4 επιλογές, ακολούθως ο (2) διαλέγοντας μετά τον (1) έχει 3 επιλογές, και ο (3) θα έχει 2 επιλογές.
Άρα, συνολικά θα έχουν (σύμφωνα με την Πολ/κή Αρχή), 4.3.2=24 διαφορετικούς τρόπους διανυκτέρευσης.

Γενικεύοντας έχουμε:

1. ***Διάταξη (ν ανά κ, χωρίς επανάληψη)***

Διάταξη ν διακεκριμένων στοιχείων ανά κ $(1 \le \kappa \le \nu)$, λέγεται κάθε διαφορετική τοποθέτηση κ στοιχείων από τα ν σε διατεταγμένη σειρά, τη συμβολίζουμε Δ_κ^ν και αποδεικνύεται ότι το πλήθος τους είναι:

$$\boxed{\Delta_\kappa^\nu = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!} = \nu(\nu-1)...(\nu-\kappa+1)}, \qquad \textit{(Διατάξεις ν ανά κ, χωρίς επανάληψη)} \qquad \textbf{(1)}$$

(Υπενθυμίζεται ότι, ν!=1.2.3…(ν-1).ν, δηλ. 1!=1, 2!=1.2, 3!=1.2.3, 4!=1.2.3.4, κτλ, ενώ ορίζεται 0!=1).

Απόδειξη
Από τα ν διαφορετικά στοιχεία, διαλέγοντας την πρώτη φορά για να πάρουμε το πρώτο από τα κ στοιχεία, έχουμε ν επιλογές. Για το 2^o στοιχείο έχουμε (ν-1) επιλογές για το 3^o έχουμε (ν-2) επιλογές, κτλ, ενώ για το τελευταίο από τα κ θα έχουμε [ν-(κ-1)]=ν-κ+1 επιλογές.
Άρα, κατά την Πολ/κή Αρχή Απαρίθμησης θα έχουμε τελικά:
ν(ν-1)(ν-2)…(ν-κ+1), διατάξεις των ν ανά κ.

Π.χ.
α) Στο παραπάνω παράδειγμα όπου ν=4 ξενοδοχεία και κ=3 ταξιδιώτες, κατά τον τύπο (1), έχουμε: $\Delta_{\kappa=3}^{\nu=4} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4(4-1)(4-3+1) = 4.3.2 = 24$.
β) Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1,2,3,4,5, (χωρίς επανάληψη του ίδιου ψηφίου);
Σχηματίζουμε τόσους τριψήφιους, όσο και το πλήθος των διατάξεων των 5 ανά 3, δηλ. $\Delta_{\kappa=3}^{\nu=5} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5(5-1)...(5-3+1) = 5.4.3 = 60$ τριψήφιους αριθμούς.

2. *Διάταξη (ν ανά κ, με επανάληψη)*

Αν τα ν στοιχεία μπορούν και να επαναλαμβάνονται μέχρι κ φορές, τότε μιλάμε για Διατάξεις των ν ανά κ με επανάληψη ή επανατοποθέτηση, οπότε έχουμε:

$$\boxed{\Delta(E)_{\kappa}^{\nu} = \nu^{\kappa}}, \qquad \textbf{\textit{(Διατάξεις ν ανά κ, με επανάληψη)}} \qquad \textbf{(1α)}$$

Π.χ.

α) Με τα ψηφία 1,2,3,4,5, παίρνοντας τώρα διατάξεις με επανάληψη (θα έχουμε δηλ. και τριψήφιους π.χ. 111, 221, κτλ), το σύνολο των σχηματιζόμενων τριψήφιων θα είναι: $\Delta(E)_{\kappa=3}^{\nu=5} = 5^3 = 125$ αριθμοί.

β) Στο γνωστό παιχνίδι ΠΡΟ-ΠΟ, οι στήλες που πρέπει να συμπληρωθούν για να εξασφαλίσουμε ένα 13-άρι είναι, $\Delta(E)_{\kappa=13}^{\nu=3} = 3^{13} = 1.594.323$,

αφού για κάθε ένα από τα 13 ματς έχουμε 3 δυνατές προβλέψεις-σημεία 1,2,Χ, δηλ. έχουμε διατάξεις των 3 ανά 13 με επανάληψη.

(Δηλ. παίζοντας μια στήλη στο ΠΡΟ-ΠΟ περιμένεις να κερδίσεις ένα 13-άρι, με πιθανότητα $\frac{1}{1.594.323}$.

Αλήθεια ποιος πράγματι λογικός άνθρωπος θα έπαιζε, γνωρίζοντας τις μηδαμινές πιθανότητες που έχει για να κερδίσει;).

2.3. ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

1. Αν τώρα θεωρήσουμε την ιδιαίτερη περίπτωση των διατάξεων όπου ν=κ, ή αλλιώς μια τυχαία τοποθέτηση ν διακεκριμένων στοιχείων σε μια διατεταγμένη σειρά σε ευθεία γραμμή, τότε το πλήθος των διαφορετικών αυτών τοποθετήσεων λέγεται *Μετάθεση των ν στοιχείων*, τη συμβολίζουμε Δ_ν^ν και αποδεικνύεται ότι το πλήθος τους είναι:

$$\boxed{\Delta_\nu^\nu = \nu! = 1.2.3...(\nu-1)\nu},$$ ***(Μεταθέσεις ν στοιχείων, χωρίς επανάληψη)*** **(2)**

Π.χ.
Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης «μηχανικός» υπάρχουν;
Απάντηση:
Υπάρχουν τόσοι αναγραμματισμοί, όσες και μεταθέσεις των 9 (διαφορετικών γραμμάτων της λέξης «μηχανικός»), δηλ.

$$\Delta_{\nu=9}^{\nu=9} = 9! = 1.2.3...(9-1)9 = 362.880\,.$$

2. Εξάλλου, αν μέσα στα ν στοιχεία ή αντικείμενα υπάρχουν m ομάδες $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_m$, με $\kappa_1 + \kappa_2 + ... + \kappa_m = \nu$, που η καθεμιά περιέχει όμοια μεταξύ τους στοιχεία αλλά διαφορετικά των άλλων ομάδων, τότε μιλάμε για *Μεταθέσεις με Επανάληψη*, που αποδεικνύεται ότι είναι:

$$\boxed{\Delta_{\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_m}^{\nu} = \frac{\nu!}{\kappa_1!\kappa_2!...\kappa_m!}},$$ ***(Μεταθέσεις ν στοιχείων ανά m ομάδες, με επανάληψη)*** **(2α)**

Π.χ.
Κατά πόσους τρόπους 14 βιβλία διαφορετικά μεταξύ τους, μπορούν να μοιραστούν σε 4 φοιτητές, έτσι ώστε ο α' να πάρει 5 βιβλία, ο β' 4 βιβλία, ο γ' 3 βιβλία και ο δ' να πάρει 2 βιβλία;
Τα 14 βιβλία μπορούν να μοιραστούν στους 4 φοιτητές σύμφωνα με τον (2a), κατά

$\Delta_{\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_m}^{\nu} = \Delta_{5,4,3,2}^{14} = \dfrac{14!}{5!4!3!2!}$ διαφορετικούς τρόπους.

3. Επίσης, *Κυκλική Μετάθεση ν στοιχείων*, λέγεται κάθε τοποθέτησή τους σε περιφέρεια κύκλου. Τότε το πλήθος των διαφορετικών κυκλικών μεταθέσεων των ν αντικειμένων αποδεικνύεται ότι είναι:

$$\boxed{\mathrm{K}_\nu = (\nu-1)! = 1.2.3...(\nu-1)},$$ ***(Κυκλικές Μεταθέσεις ν στοιχείων)*** **(2β)**

Π.χ.
α) Κατά πόσους τρόπους 11 σύμβουλοι μιας εταιρείας μπορούν να καθίσουν σε ένα στρογγυλό τραπέζι;
Σύμφωνα με τον (2b), κατά $\mathrm{K}_{\nu=11} = (11-1)! = 1.2.3...10 = 3.628.800$ τρόπους.
β) Κατά πόσους τρόπους οι 6 παίχτες του βόλεϊ μπορούν να εναλλαγούν κυκλικά;
Σύμφωνα με τον (2b), κατά $\mathrm{K}_{\nu=6} = (6-1)! = 5! = 120$ διαφορετικούς τρόπους.

2.4. ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

1. Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα. Στο γνωστό παιχνίδι του μπριτζ, σε κάθε παρτίδα μοιράζονται σε καθέναν από τους παίχτες 13 χαρτιά από μια τράπουλα των 52 χαρτιών. Ποιο είναι το πλήθος όλων των δυνατών και διαφορετικών μεταξύ τους τέτοιων μοιρασμάτων (13-άδων), που μπορεί να περιμένει ένας παίχτης;

Δηλ. γενικά:
Αν έχουμε ν διαφορετικά στοιχεία και παίρνουμε κάθε φορά κ από αυτά, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά τους (η διάταξή τους), ποιο είναι το πλήθος των ν ανά κ τέτοιων δυνατών συνδυασμών;

Η απάντηση τότε, έχει γενικά ως εξής:
Το πλήθος των διαφορετικών υποσυνόλων από κ στοιχεία, που μπορούν να σχηματιστούν από ένα σύνολο με ν στοιχεία ($\nu \geq \kappa$), λέγεται *Συνδυασμός των ν ανά κ*, συμβολίζεται με $\binom{\nu}{\kappa}$ και αποδεικνύεται ότι ισούται:

$$\boxed{\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!} = \frac{\nu(\nu-1)...(\nu-\kappa+1)}{\kappa!}}, \quad \textit{(Συνδυασμοί ν ανά κ, χωρίς επανάληψη)} \quad \textbf{(3)}$$

Απόδειξη
Η συλλογιστική της απόδειξης είναι όμοια όπως και στην περίπτωση των Διατάξεων. Έτσι, αν είχαμε Διάταξη των ν ανά κ, θα βρίσκαμε ότι κατά τον τύπο (1) το πλήθος είναι, $\Delta_{\kappa}^{\nu}=\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}=\nu(\nu-1)...(\nu-\kappa+1)$,
όπου όμως στις Διατάξεις ενδιαφέρει και η σειρά των υποσυνόλων με κ στοιχεία.

Στους Συνδυασμούς όμως, όπως είπαμε, δεν ενδιαφέρει η σειρά τους (δηλ. η διάταξή τους, π.χ. για κ=3, τότε τα 6 υποσύνολα {α,β,γ}, {β,γ,α}, {γ,α,β}, {α,γ,β}, {γ,β,α}, {β,α,γ} για τους Συνδυασμούς είναι όλα ίσα).
Άρα γενικά, το κάθε κ-μελές υποσύνολο υπολογίζεται κ! φορές στον παραπάνω τύπο (1) των Διατάξεων όπου μας ενδιαφέρει η σειρά.

Συνεπώς οι ζητούμενες κ-άδες, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά (όπως στους Συνδυασμούς), προκύπτει από τον (1) διά κ!, δηλ.: $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\Delta_{\kappa}^{\nu}}{\kappa!} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$.

Παραδείγματα

α) Επανερχόμενοι στο αρχικό πρόβλημα του μπριτζ, το πλήθος των δυνατών και διαφορετικών μεταξύ τους 13-άδων (χωρίς να ενδιαφέρει η σειρά των χαρτιών) σύμφωνα με τον τύπο (3), θα είναι: $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{52}{13} = \frac{52!}{13!(52-13)!} = \frac{52.51...40}{13!} = 635.013.559.600$.

β) Στο γνωστό παιχνίδι ΛΟΤΤΟ, το πλήθος των 6 διαφορετικών αριθμών από 49, είναι οι συνδυασμοί των 49 ανά 6, δηλ. $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{49.48...44}{6!} = 13.983.816$.

Δηλ. παίζοντας μια στήλη στο ΛΟΤΤΟ περιμένεις να κερδίσεις με πιθανότητα $\frac{1}{13.983.816}$, (αλήθεια ποιος λογικός άνθρωπος θα έπαιζε;).

γ) Κατά τη συνάντηση 7 ατόμων, πόσες δυνατές χειραψίες μπορούν να γίνουν;

Προφανώς σύμφωνα με τον τύπο (3), είναι: $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{5!6.7}{2!5!} = \frac{6.7}{2!} = \frac{42}{2} = 21$.

2. Εξάλλου, ονομάζουμε *Συνδυασμούς των ν ανά κ με επαναλήψεις*, τους Συνδυασμούς όπου τα ν στοιχεία μπορούν να επαναλαμβάνονται όχι όμως περισσότερες από κ φορές, συμβολίζονται συνήθως με $\mathrm{E}\binom{\nu}{\kappa}$ και αποδεικνύεται ότι είναι:

$$\boxed{\mathrm{E}\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu+\kappa-1}{\kappa}}, \quad \textit{(Συνδυασμοί ν ανά κ, με επανάληψη)} \qquad \mathbf{(3α)}$$

Π.χ.

Πόσα ακέραια μονώνυμα της μορφής $x^{\kappa}y^{\lambda}z^{\mu}$, 4^{ου} βαθμού ως προς όλες τις μεταβλητές x,y,z, μπορούμε να σχηματίσουμε;

Επειδή κάθε μονώνυμο αντιστοιχεί σε ένα συνδυασμό των 3 γραμμάτων x,y,z, ανά 4 με επαναλήψεις (π.χ. το x^3y αντιστοιχεί στον συνδυασμό *xxxy* και αντίστροφα), άρα κατά τον (3α) είναι: $\mathrm{E}\binom{\nu}{\kappa} = \mathrm{E}\binom{3}{4} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{4!5.6}{4!2!} = 15$.

Παρατηρήσεις

1) Στις Διατάξεις και Μεταθέσεις, σε κάθε τοποθέτηση των στοιχείων μας ενδιαφέρει όχι μόνον η σειρά αλλά και η θέση δηλ. η διάταξη των στοιχείων.
Αντίθετα στους Συνδυασμούς μας ενδιαφέρει μόνο το είδος των στοιχείων και όχι η θέση των στοιχείων κάθε σειράς.
Έτσι, δύο διατάξεις που έχουν τα ίδια στοιχεία αλλά σε διαφορετική θέση (διάταξη) θεωρούνται διαφορετικές, π.χ. {α,β,γ} ≠ {β,γ,α}, ενώ για τους συνδυασμούς δεν έχει σημασία η θέση-διάταξη των στοιχείων τους δηλ. {α,β,γ}={β,γ,α}.

2) Οι Συνδυασμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να χωρίσουμε ένα σύνολο από ν στοιχεία σε δύο ομάδες, η μία με κ στοιχεία και η άλλη με ν-κ στοιχεία, που όπως είδαμε το πλήθος τους είναι, $\binom{\nu}{\kappa}$, όπου $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$, $\nu \geq \kappa$.

3) Η έννοια του Συνδυασμού μας επιτρέπει επίσης να επαληθεύσουμε τον τύπο του αναπτύγματος του *Διωνύμου του Νεύτωνα*, δηλ. $(\alpha+\beta)^{\nu} = \sum_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}.\alpha^{\kappa}\beta^{\nu-\kappa}$.

Έτσι, π.χ. $(x+1)^{\nu} = \sum_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}x^{\kappa}$.

Εξάλλου σχετικά δεχόμαστε ότι, $\binom{\nu}{0} = \binom{0}{0} = 1$, ενώ προφανώς $\binom{\nu}{\nu} = 1$.

4) Το ν! είναι αρκετά μεγάλος αριθμός ακόμη και για σχετικά μικρές τιμές του ν, π.χ. 10!=3.628.800, 20!=2,43.10^{18}. Έτσι μια καλή προσέγγιση του ν! θα διευκόλυνε τέτοιες πράξεις που συχνά εμφανίζονται σε προβλήματα Πιθανοτήτων.

Στις περιπτώσεις αυτές διευκολύνει ο σχετικός ***τύπος του Stirling***: $\nu! \simeq (\frac{\nu}{e})^{\nu}\sqrt{2\pi\nu}$, όπου $e \simeq 2{,}718$ και $\pi \simeq 3{,}14$, με την έννοια ότι όσο αυξάνει το ν τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση, αφού ισχύει, $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \dfrac{\nu!}{(\frac{\nu}{e})^{\nu}\sqrt{2\pi\nu}} = 1$.

Ακόμα και για μικρά ν η προσέγγιση είναι αρκετά καλή, αφού π.χ. για ν!=5!=120, ο τύπος του Stirling δίνει, $5! \simeq (\frac{5}{e})^{5}\sqrt{2\pi 5} = 5^{5}e^{-5}\sqrt{10\pi} = 118{,}09$.

5) α) Στη σχέση (3) είδαμε ότι, $\binom{\nu}{\kappa} = \dfrac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$, με $\nu \geq \kappa \geq 0,\ \nu,\kappa \in \mathbb{N}$, όπου $\binom{\nu}{\kappa}$ είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος του ***διωνύμου του Νεύτωνα*** $(\alpha+\beta)^{\nu}$,

δηλ. $(\alpha+\beta)^{\nu} = \sum\limits_{\kappa=0}^{\nu}\binom{\nu}{\kappa}\alpha^{\nu-\kappa}\beta^{\kappa}$, όπου $(|\beta|<|\alpha|)$ και $\binom{\nu}{\nu} = 1$, (I)

ενώ δεχόμαστε ότι $\binom{\nu}{0} = 1$ και $\binom{0}{0} = 1$.

Έτσι, μέσω της σχέσης (I) παίρνουμε τη γνωστή ταυτότητα του διωνύμου του Νεύτωνα,

$$(\alpha+\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} + \nu\alpha^{\nu-1}\beta + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\alpha^{\nu-2}\beta^{2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\alpha^{\nu-3}\beta^{3} + \ldots + \beta^{\nu}, \qquad \text{(II)}$$

όπου ισχύει:
- Αναπτύσσεται σε (ν+1) ομογενή μονώνυμα (βαθμού ν),
- Ο συντελεστής κάθε μονώνυμου βρίσκεται πολ/ντας τον συντελεστή του προηγούμενου μονώνυμου με τον βαθμό του α και διαιρώντας με τη θέση του μονώνυμου στο ανάπτυγμα (που είναι γραμμένο κατά τις κατιούσες δυνάμεις του α),
- Οι συντελεστές των μονωνύμων που ισαπέχουν των ακραίων είναι ίσοι.

Π.χ.

$$(\alpha+\beta)^{5} = \alpha^{5} + 5\alpha^{4}\beta + 10\alpha^{3}\beta^{2} + 10\alpha^{2}\beta^{3} + 5\alpha\beta^{4} + \beta^{5}.$$

β) Επειδή αποδεικνύεται ότι ισχύει, $\binom{\nu}{\kappa} + \binom{\nu}{\kappa+1} = \binom{\nu+1}{\kappa+1}$, μπορούμε να υπολογίζουμε τους συντελεστές του διωνύμου του Νεύτωνα σχηματίζοντας και το λεγόμενο ***Τρίγωνο του Pascal***, ως εξής:

$$\begin{array}{llll}
\binom{0}{0} & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\ldots\ldots & & &
\end{array}
\quad \text{ή} \quad
\begin{array}{llll}
1 & & & \\
1 & 1 & & \\
1 & 2 & 1 & \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
\ldots\ldots & & &
\end{array}$$

2.5. Ασκήσεις *(στη Συνδυαστική Ανάλυση)*

1) Κατά πόσους τρόπους μπορούν να διανεμηθούν 5 ερευνητικά φάρμακα σε ισάριθμους ασθενείς;

Λύση

Είναι Μεταθέσεις 5 ανά 5, άρα μπορούν να διανεμηθούν κατά $\Delta_\nu^\nu = \Delta_5^5 = 5! = 120$ τρόπους.

2) Κατά πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 5 χαρτιά από μια δέσμη 32 χαρτιών (πόκερ);

Λύση

Είναι Συνδυασμοί των 32 ανά 5, δηλ.: $\binom{32}{5} = \frac{32!}{5!(32-5)!} = \frac{32.31...28}{5!} = \frac{24.165.120}{120} = 201.376$.

3) Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί ή αλλιώς πόσες είναι οι διακεκριμένες μεταθέσεις των γραμμάτων της λέξης MISSISSIPPI;

Λύση

Πρόκειται για Μεταθέσεις με Επαναλήψεις, 11 μη διακεκριμένων γραμμάτων-στοιχείων, όπου m=4 ομάδες (4 διαφορετικά γράμματα της λέξης), με $\kappa_1=1$ (για το γράμμα M), $\kappa_2=4$ (για το γράμμα I) , $\kappa_3=4$ (για το γράμμα S), $\kappa_4=2$ (για το γράμμα P).
Άρα κατά τον τύπο (2α) είναι: $\Delta^\nu_{\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_m} = \frac{\nu!}{\kappa_1!\kappa_2!...\kappa_m!} = \frac{11!}{1!4!4!2!} = 34.650$.

4) Να βρεθεί το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.

Λύση

Πρόκειται (όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα) για Μεταθέσεις με Επαναλήψεις, 10 μη διακεκριμένων γραμμάτων-στοιχείων, όπου έχουμε m=7 ομάδες (7 διαφορετικά γράμματα της λέξης), με $\kappa_1=2$ (για το στοιχείο-γράμμα Μ), $\kappa_2=3$ (για το γράμμα Α) , $\kappa_3=1$ (για το γράμμα Θ), $\kappa_4=1$ (για το γράμμα Η), $\kappa_5=1$ (για το γράμμα Τ), $\kappa_6=1$ (για το γράμμα Ι), και $\kappa_7=1$ (για το γράμμα-στοιχείο Κ).

Άρα κατά τον τύπο (2α) είναι:

$$\Delta^{\nu=10}_{\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_{m=7}} = \frac{\nu!}{\kappa_1!\kappa_2!...\kappa_7!} = \frac{10!}{2!3!1!1!1!1!1!} = \frac{3.628.800}{12} = 302.400 .$$

5) Σε ένα τυχερό παιχνίδι κληρώνονται 6 αριθμοί από 54. Κερδίζουμε το α΄ βραβείο όταν παίξουμε τους 6 αριθμούς που κληρώνονται, ενώ κερδίζουμε το β΄ βραβείο όταν παίξουμε τους 5 αριθμούς που κληρώνονται. Τι πιθανότητα έχουμε να κερδίσουμε το α΄ ή το β΄ βραβείο, παίζοντας μια μόνον εξάδα;

Λύση

Για να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα, παρατηρούμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα είναι όλα τα υποσύνολα με 6 στοιχεία του συνόλου Ω={1,2,…,54}, δηλ. είναι οι συνδυασμοί των 54 ανά 6, δηλ. $\binom{54}{6} = \frac{54!}{6!(54-6)!} = 25.827.165$.

Άρα η πιθανότητα να κερδίσουμε το α΄ βραβείο παίζοντας μια μόνο εξάδα, είναι προφανώς $\frac{1}{25.827.165}$.

Για το β΄ βραβείο πρέπει να παίξουμε τους 5 αριθμούς από τους 6 που κερδίζουν και 1 αριθμό από τους 48 που χάνουν,

δηλ. να παίξουμε μια σωστή πεντάδα μεταξύ $\binom{6}{5}\binom{48}{1}$ πεντάδων,

οπότε η πιθανότητα να κερδίσουμε το β΄ βραβείο παίζοντας μια μόνο πεντάδα, είναι $\frac{\binom{6}{5}\binom{48}{1}}{\binom{54}{6}} \simeq \frac{1}{89.678}$.

6) Ποια είναι η πιθανότητα σε μια παρτίδα του πόκερ (σε τράπουλα των 52 χαρτιών) να έχουμε φλος (δηλ. 5 διαδοχικά χαρτιά όλα του ίδιου χρώματος, από 5 έως 10, και βαλές, ντάμα, ρήγας και άσσος π.χ. 8-9-10-βαλές-ντάμα, όλα κούπες);

Λύση

Καταρχήν όλες οι δυνατές πεντάδες είναι $\binom{52}{5} = 2.598.960$. Κατόπιν βρίσκουμε ότι έχουμε 10 δυνατές επιλογές χαρτιών (5,6,7,8,9,10, βαλές, ντάμα, ρήγας και άσσος), καθώς και 4 χρώματα (σπαθί, καρό, κούπες, μπαστούνια).

Άρα συνολικά έχουμε 10x4=40 δυνατότητες φλος.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $\frac{40}{\binom{52}{5}} \simeq 0,00001539$.

7) ***Το πρόβλημα του Chevalier de Meré***

Ο Μαρκήσιος *Chevalier de Meré* (έχοντας προφανώς πολύ χρόνο για χάσιμο), έθεσε στον Pascal το εξής πρόβλημα: Τι είναι συμφερότερο, να στοιχηματίσει κάποιος την εμφάνιση ενός 6 κατά τη ρίψη ενός ζαριού 4 φορές, ή να στοιχηματίσει την εμφάνιση τουλάχιστον μια εξάρες (6,6) κατά τη ρίψη 2 ζαριών 24 φορές;

Ο Pascal του απάντησε ότι το στοίχημα με το ένα ζάρι είναι συμφερότερο.

Ποια είναι η δική σας εξήγηση;

Λύση

Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα:

Α={εμφανίζεται τουλάχιστον ένα 6 στις 4 ρίψεις ενός ζαριού},

Β={εμφανίζεται τουλάχιστον ένα (6,6) στις 24 ρίψεις 2 ζαριών}.

Ο δειγματοχώρος του α΄ π.τ. αποτελείται από 6^4 στοιχεία, αφού είναι, *Διατάξεις ν=6 ανά κ=4, με επανάληψη,* δηλ. $\Delta(E)_\kappa^\nu = \nu^\kappa = 6^4$.

Όμως, τα ευνοϊκά στοιχεία του αντίθετου ενδεχομένου του Α, δηλ. του Α΄, είναι όσες τετράδες δεν περιέχουν την ένδειξη 6 δηλ. με ένδειξη (1,2,3,4,5), άρα είναι *Διατάξεις ν=5 ανά κ=4, με επανάληψη,* δηλ. είναι σε πλήθος $\Delta(E)_\kappa^\nu = \nu^\kappa = 5^4$.

Οπότε, $P(A)=1-P(A')=1-\frac{5^4}{6^4}=1-(\frac{5}{6})^4=1-(0.833)^4=1-0.482=0.518$.

Ο δειγματοχώρος του β΄ π.τ. αποτελείται από 36^{24} στοιχεία, αφού είναι, *Διατάξεις ν=36 ανά κ=24, με επανάληψη,* δηλ. $\Delta(E)_{\kappa}^{\nu} = \nu^{\kappa} = 36^{24}$.

Όμως, τα ευνοϊκά στοιχεία του αντίθετου ενδεχομένου του Β, δηλ. του Β΄, είναι όσες εικοσιτετράδες δεν περιέχουν την ένδειξη (6,6), άρα είναι *Διατάξεις των ν=35 ανά κ=24, με επανάληψη,* δηλ. είναι σε πλήθος $\Delta(E)_{\kappa}^{\nu} = \nu^{\kappa} = 35^{24}$.

Οπότε, P(B)=1-P(B΄)=1-$\frac{35^{24}}{36^{24}}$=1-$(\frac{35}{36})^{24}$=1-$(0.972)^{24}$=1-0.509=0.491 .

. Επομένως, πράγματι το στοίχημα με το ένα ζάρι είναι συμφερότερο.

8) Πόσοι διαφορετικοί σχηματισμοί μπορούν να δημιουργηθούν από 9 σημαίες στη σειρά, αν 3 είναι της ΑΕΚ, 3 του Ολυμπιακού, 2 του ΠΑΟ και 1 του ΠΑΟΚ;

Λύση

Είναι, $\Delta_{\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_m}^{\nu} = \frac{\nu!}{\kappa_1!\kappa_2!\ldots\kappa_m!}$, ***(Μεταθέσεις ν στοιχείων ανά m ομάδες, με επανάληψη)***,

όπου $\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_m = \nu$.

Άρα εδώ είναι,

$$\Delta_{\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_m}^{\nu} = \frac{\nu!}{\kappa_1!\kappa_2!\ldots\kappa_m!} = \frac{9!}{3!3!2!1!} = 5040 \quad \text{σχηματισμοί.}$$

9) *Το πρόβλημα του πρίγκιπα της Τοσκάνης στον Γαλιλαίο*

Ο πρίγκιπας της Τοσκάνης παίζοντας με τα ζάρια, παρατήρησε ότι ρίχνοντας 3 ζάρια και παίρνοντας το άθροισμα των πάνω ενδείξεών τους, είδε το εξής:
ότι το άθροισμα 10 έρχεται πιο συχνά από ότι το άθροισμα 9, παρότι τα δύο αυτά αθροίσματα σχηματίζονται από 6 διαφορετικούς τρόπους το καθένα,
π.χ. 9=1+2+6=1+3+5=1+4+4=2+3+4=2+2+5=3+3+3.

Ρώτησε τότε τον Γαλιλαίο για την εξήγηση του προβλήματος, ο οποίος του την έδωσε. Ποια είναι η δική σας εξήγηση;

Λύση

Ας θεωρήσουμε ότι οι ενδείξεις των 3 ζαριών είναι γενικά a,b,c, οπότε το άθροισμα κάθε τριάδας θα είναι S=a+b+c. Προφανώς το πλήθος των διαφορετικών τριάδων (a,b,c) που μπορεί να προκύψουν είναι,
Διατάξεις ν=6 ανά κ=3, με επανάληψη, δηλ. $\Delta(E)_{\kappa}^{\nu} = \nu^{\kappa} = 6^3 = 216$.

Οπότε, αν απαριθμήσουμε τις τριάδες για τις οποίες είναι S=9, έχουμε συνολικά 25, και συγκεκριμένα τις εξής:

6 της μορφής (1,2,6), δηλ. (1,2,6), (1,6,2), (2,1,6), (2,6,1), (6,1,2), (6,2,1),
όμοια, 6 της μορφής (1,3,5) και 6 της μορφής (2,3,4),
3 της μορφής (1,4,4), δηλ. (1,4,4), (4,1,4), (44,1),
όμοια, 3 της μορφής (2,2,5)
και 1 της μορφής (3,3,3).

Επίσης, οι διαφορετικές τριάδες που δίνουν άθροισμα 10, είναι:
10=1+3+6=1+4+5=2+2+6=2+3+5=2+4+4=3+3+4,

ενώ απαριθμώντας όλες τις τριάδες για τις οποίες είναι S=10, έχουμε συνολικά 27, και συγκεκριμένα τις εξής:

6 της μορφής (1,3,6), δηλ. (1,3,6), (1,6,3), (3,1,6), (3,6,1), (6,1,3), (6,3,1), και
6 της μορφής (1,4,5),
6 της μορφής (2,3,5),
3 της μορφής (2,2,6),
3 της μορφής (2,4,4),
3 της μορφής (3,3,4).

Συνεπώς, τα άθροισμα 10 εμφανίζεται πράγματι πιο συχνά (27 στις 216), από ότι το άθροισμα 9 (25 στις 216).

Έτσι, καλώς είχε παρατηρήσει ο πρίγκιπας της Τοσκάνης (αφού προφανώς είχε πολύ ελεύθερο χρόνο, για να παίζει με τα ζάρια!).

3. ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ - ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

3.1. Τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης (π.τ.) μπορεί γενικά να είναι αριθμοί, είτε άμεσα π.χ. όταν μελετάμε ένα πλήθος ανθρώπων ως προς το ύψος τους τότε σε κάθε άτομο αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό που είναι το ύψος του, είτε έμμεσα όταν τα αποτελέσματα ενός π.τ. δεν είναι αριθμοί μπορούν όμως να μετασχηματιστούν σε αριθμούς, όπως π.χ. στη ρίψη ενός νομίσματος να θέτουμε 0 αν έρχεται Κ (Κεφάλι) και 1 αν έρχεται Γ (Γράμματα), ή εξετάζοντας το φύλο των κατοίκων μιας κοινότητας να θέτουμε 1 αν είναι άνδρας και 2 αν είναι γυναίκα, είτε ακόμη εξετάζοντας τα παραγόμενα προϊόντα μιας βιομηχανίας να θέτουμε -1 (αν είναι ελαττωματικό) και 1 (αν είναι μη-ελαττωματικό), κτλ.

Συνεπώς, τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης μπορούν γενικά να αντιστοιχίζονται σε πραγματικούς αριθμούς (δηλ. να εκπροσωπούνται από αριθμούς). Η αντιστοιχία αυτή μπορεί να μοντελοποιηθεί (μαθηματικοποιηθεί) γενικά ως μια συνάρτηση που λέγεται Τυχαία Μεταβλητή με πεδίο ορισμού τον δειγματοχώρο Ω και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Έννοια της Τυχαίας Μεταβλητής

Θεωρούμε το πείραμα τύχης της ρίψης 3 νομισμάτων ταυτόχρονα, που προφανώς έχει δειγματοχώρο Ω={(ΓΓΓ), (ΚΓΓ), (ΚΚΓ), (ΚΚΚ)}, όπου Γ=Γράμματα και Κ=Κεφάλι.
Ενδιαφερόμενοι π.χ. για το πόσα Κ εμφανίζονται, δημιουργούμε τις εξής αντιστοιχίσεις:

$$\left.\begin{array}{l}(\Gamma\Gamma\Gamma)\mapsto 0\\(\mathrm{K}\Gamma\Gamma)\mapsto 1\\(\mathrm{KK}\Gamma)\mapsto 2\\(\mathrm{KKK})\mapsto 3\end{array}\right\},\quad \text{δηλ. συνολικά την αντιστοιχία,}\quad \Omega\to\{0,1,2,3\}\subseteq\mathbb{R},$$

που μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση Χ, με πεδίο ορισμού τον δειγματοχώρο Ω και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δηλ.
$\mathrm{X}:\omega\in\Omega=\{\Gamma\Gamma\Gamma,\mathrm{K}\Gamma\Gamma,\mathrm{KK}\Gamma,\mathrm{KKK}\}\to\mathrm{X}(\omega)=\mathrm{x}\in\mathrm{X}(\Omega)=\{0,1,2,3\}\subseteq\mathbb{R}$.

Οπότε, έχουμε τον ορισμό:
Ονομάζουμε ***τυχαία ή στοχαστική μεταβλητή (τ.μ.)****-random variable,* μια συνάρτηση Χ που αντιστοιχίζει το σύνολο Ω των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης σε ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$,
ή γενικότερα,
ονομάζουμε ***τυχαία μεταβλητή*** μια συνάρτηση Χ με πεδίο ορισμού τον δειγματοχώρο Ω ενός π.τ. και πεδίο τιμών στο $\mathbb{R}$,

$$\mathrm{X}:\omega\in\Omega\to\mathrm{X}(\omega)=\mathrm{x}\in\mathrm{X}(\Omega)\subseteq\mathbb{R}, \qquad \textbf{(1)}$$

όπου το σύνολο $\mathrm{X}^{-1}(-\infty,\mathrm{x}]$, δηλ. $\{\omega\in\Omega:\mathrm{X}(\omega)\le\mathrm{x}\}$, για κάθε $\mathrm{x}\in\mathbb{R}$, είναι ένα ενδεχόμενο του Ω. **(1α)**

Παρατηρήσεις *(στην έννοια της τυχαίας μεταβλητής)*

1) Η έννοια της τ.μ. είναι θεμελιώδης για τον ***Λογισμό των Πιθανοτήτων*** και μαθηματικοποιεί (κάνει μετρήσιμη) τη βασική έννοια-μέγεθος της ***τυχαιότητας*** που χαρακτηρίζει τα αποτελέσματα ενός π.τ. (ή ενός στοχαστικού φαινομένου).

Η μελέτη των τ.μ. διευκολύνεται με τον χωρισμό τους σε δύο κατηγορίες, τις διακριτές και συνεχείς τ.μ., ως ακολούθως.
Μια τ.μ. λέγεται ***διακριτή τ.μ.***, αν το πεδίο τιμών της $X(\Omega)$ είναι διακριτό σύνολο (πεπερασμένο ή αριθμήσιμο),
ενώ λέγεται ***συνεχής τ.μ.*** όταν $X(\Omega)$ είναι συνεχές υποδιάστημα του $\mathbb{R}$.

2) Σε δοθέντα δειγματοχώρο ενός π.τ. μπορούμε να ορίσουμε όσες τ.μ. μας ενδιαφέρουν. Έτσι στο προηγούμενο π.τ. των 3 νομισμάτων μπορούμε να ορίσουμε εκτός από την τ.μ. Χ, π.χ. και την τ.μ. Υ, με Υ(ω)=1 εάν το ω περιέχει τουλάχιστον δύο Κ και Υ(ω)=0 για τα υπόλοιπα ω, κτλ.

3) Πρακτικά η έννοια μιας τ.μ. είναι απλά μια συνάρτηση, $X:\Omega\to\mathbb{R}$, αλλά από θεωρητικής πλευράς (όταν $X(\Omega)$ είναι συνεχές υποσύνολο του $\mathbb{R}$) αποδεικνύεται ότι για να είναι τ.μ. μια συνάρτηση Χ(ω), απαιτείται να ισχύει και η συνθήκη (1α), δηλ. το σύνολο-αντίστροφη εικόνα $X^{-1}(-\infty,x]$ που είναι ταυτόσημο με το σύνολο $\Omega_1=\{\omega\in\Omega: X(\omega)\le x\}$ και συμβολίζεται συνήθως πιο απλά $[X\le x]$, πρέπει να είναι ένα ενδεχόμενο του Ω, $\forall x\in\mathbb{R}$. Η συνθήκη αυτή απαιτείται διότι τα (άπειρα) υποσύνολα-διαστήματα του $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ δεν αντιστοιχούν (θεωρητικά) όλα σε ενδεχόμενα, (βλ. και επόμενη Σημείωση).
Αυστηρότερα, τ.μ. Χ είναι μια απεικόνιση από τον πιθανοθεωρητικό χώρο (Ω,F,P) στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, όπου $F\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ είναι η οικογένεια ενδεχομένων του δειγματοχώρου Ω, ενώ $\mathcal{B}$ είναι το λεγόμενο πεδίο Borel του $\mathbb{R}$ και P η πιθανότητα-μέτρο. Δηλαδή γενικά έχουμε μια τ.μ. όταν, $X:(\Omega,F,P)\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$ όπου $X^{-1}(\mathcal{B})\subseteq F$ και $X^{-1}(I)=A\in F$ με $P(I)=P(X^{-1}(I))=P(A)$, $\forall I\in\mathcal{B}$.
Έτσι, η παραπάνω συνθήκη (1α) στον ορισμό της τ.μ., εξασφαλίζει ότι οι αντίστροφες εικόνες όλων των υποσυνόλων Ι του πεδίου Borel $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}$ να είναι ενδεχόμενα στον Ω, καθώς και. να μεταφέρονται οι πιθανότητες των ενδεχομένων $A\in F$ στα αντίστοιχα υποδιαστήματα $I\in\mathcal{B}$.
Συμπερασματικά, αν ο δειγματοχώρος Ω ενός π.τ. είναι διακριτός, τότε αποδεικνύεται ότι κάθε συνάρτηση $X:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή,
ενώ αυτό δεν ισχύει γενικά για συνεχείς τ.μ., όπου απαιτείται επιπλέον η προαναφερόμενη συνθήκη (1α).

4) Αν $X:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι μια τ.μ., τότε όλα τα υποσύνολα του Ω της μορφής, $[X\le x]$, $[X\ge x]$, $[X<x]$, $[X>x]$, $[X=x]$, $[x_1\le X\le x_2]$, $[x_1<X\le x_2]$, $[x_1\le X<x_2]$, $[x_1<X<x_2]$, όπου $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ και $x_1\le x_2$, είναι ενδεχόμενα.

Έτσι, {Χ=a} σημαίνει το υποσύνολο του Ω που τα στοιχεία του ω αντιστοιχούν στον πραγματικό αριθμό a, δηλ. Χ(ω)=a $\in\mathbb{R}$.
Αν μια τ.μ. Χ παίρνει την τιμή a με πιθανότητα P, τότε γράφουμε P(X=a).

Όμοια, το σύμβολο P(a<X<b) σημαίνει την πιθανότητα με την οποία η τ.μ. Χ παίρνει μια τιμή από το ανοιχτό διάστημα (a,b) του $\mathbb{R}$**,** και ανάλογα για τα υπόλοιπα προαναφερόμενα υποσύνολα.

Π.χ.
Θεωρώντας το π.τ. της ανάριψης 2 ζαριών, έχουμε προφανώς $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(2,1),(2,2),\ldots,(5,6),(6,5),(6,6)\}$
και μέτρο-νόμο πιθανότητας, $P(\omega)=\frac{1}{36}$, $\forall\omega\in\Omega$.
Αν ενδιαφερόμαστε π.χ. για το άθροισμα (των πάνω όψεων) των 2 ζαριών, τότε μια κατάλληλη απεικόνιση είναι η τ.μ.

$$X:\omega\in\Omega\to X(\omega)=x\in X(\Omega)=\{2,3,\ldots,12\}\subseteq\mathbb{R}.$$

Για να βρούμε την πιθανότητα-μέτρο μιας οποιασδήποτε τιμής της Χ, αρκεί να μετρήσουμε τα ω που πραγματοποιούν αυτή την τιμή, οπότε π.χ. $P(X=5)=P((1,4),(4,1),(2,3),(3,2))=\frac{4}{36}$,

και γενικά

$P(X=x)=P(X^{-1}(x))=P\{\omega\in\Omega:X(\omega)=x\}$, ενώ $P(X\leq 3)=P((1,1),(1,2),(2,1))=\frac{3}{36}$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι για να οριστεί η πιθανότητα στη τ.μ. Χ, μεταφέρεται ισοδύναμα ο νόμος πιθανότητας από το πεδίο ορισμού Ω στο πεδίο τιμών Χ(Ω).

Σημείωση (Σύνοψη - Θεωρητική Επισκόπηση)

Α) Κάθε ενδεχόμενο είναι ένα υποσύνολο του δειγματοχώρου Ω, αλλά δεν ισχύει όμως γενικά και το αντίστροφο (δηλ. κάθε υποσύνολο του Ω δεν είναι πάντα ένα ενδεχόμενο).
Πιο συγκεκριμένα, πρακτικά (στις εφαρμογές) ισχύει και το αντίστροφο, αφού ισχύει πάντα όταν ο δειγματοχώρος Ω είναι διακριτός, ενώ δεν ισχύει μόνον σε μερικές περιπτώσεις όταν Ω είναι συνεχής και υπάρχουν (θεωρητικά) κάποια υποσύνολα του δειγματοχώρου όπου δεν μπορεί να οριστεί το μέτρο-πιθανότητα. Και τούτο συμβαίνει διότι ο αξιωματικός ορισμός της Πιθανότητας θεμελιώνεται (μέσω της Θεωρίας Μέτρου) σε άπειρες ενώσεις ή τομές ενδεχομένων που σχηματίζουν συνολικά την οικογένεια ενδεχομένων F του δειγματοχώρου Ω, όπου F πρέπει να έχει τη δομή μιας *φυλής ή σ-άλγεβρας* επί του Ω (και όπου η βασική έννοια είναι πρώτα το ενδεχόμενο και ακολουθεί η έννοια του υποσυνόλου που απλά είναι μια συνολοθεωρητική έκφραση του ενδεχομένου).
Άρα, το σύνολο των ενδεχομένων (φυλή) F είναι γενικά «μικρότερο» του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(\Omega)$ ={το σύνολο όλων των υποσυνόλων του Ω}, δηλ. $F \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, αφού όταν X είναι συνεχής τ.μ. τότε η φυλή F δημιουργείται από διαστήματα του $\mathbb{R}$.

Στην Πιθανοθεωρία, το Ω είναι ο δειγματοχώρος (το σύνολο αναφοράς) δηλ. το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης, ενώ το F είναι *το σύνολο όλων των ενδεχομένων* δηλ. *το σύνολο των μετρήσιμων (με μέτρο την πιθανότητα) συνόλων*.
Εάν ο δειγματικός χώρος Ω είναι διακριτός (πεπερασμένος ή αριθμήσιμος) τότε κάθε υποσύνολό του δηλ. κάθε στοιχείο του F είναι ένα ενδεχόμενο, και μάλιστα η ένωση και η τομή ενδεχομένων είναι επίσης ενδεχόμενα (δηλ. μετρήσιμα σύνολα). Εάν όμως ο δειγματικός χώρος είναι συνεχής (π.χ. η ευθεία γραμμή $\mathbb{R}$), τότε υπάρχουν (θεωρητικά) υποσύνολα του Ω που δεν μπορούν να εκφραστούν ως ενώσεις ή τομές ενδεχομένων (π.χ. των όποιων διαστημάτων του $\mathbb{R}$). Έτσι στην Πιθανοθεωρία για τη δημιουργία ενός ομοιόμορφου συστήματος αξιωμάτων (ανεξαρτήτως αν το Ω είναι διακριτό ή συνεχές σύνολο), περιορίζουμε την έννοια "ενδεχόμενο" έτσι ώστε να μην αναφέρεται σε κάθε υποσύνολο του Ω, αλλά μόνον σ' εκείνα τα μετρήσιμα υποσύνολα του Ω που μπορούν να εκφραστούν ως ενώσεις ή τομές ενδεχομένων-"διαστημάτων του $\mathbb{R}$ ".

Συμπερασματικά, η πιθανότητα P ορίζεται ως μια συνολοσυνάρτηση με πεδίο ορισμού το F και πεδίο τιμών το [0,1], δηλ. $P: A \in F \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \to P(A) \in [0,1]$.

Συνεπώς, αν θεωρήσουμε ένα π.τ. με αντίστοιχο δειγματοχώρο Ω και σύνολο ενδεχομένων (μετρήσιμων συνόλων) F, τότε η πιθανότητα-μέτρο P είναι μια συνάρτηση, που ικανοποιεί τα γνωστά τρία αξιώματα της πιθανότητας.

Β) Έστω ο χώρος πιθανοτήτων (Ω,F,P) ενός πειράματος τύχης, όπου Ω ο δειγματοχώρος, F η οικογένεια των ενδεχόμενων του π.τ., και P η συνάρτηση που μας δίνει την πιθανότητα-μέτρο κάθε ενδεχομένου. Επίσης αν E είναι η κλάση όλων των διαστημάτων (πεπερασμένων ή μη, ανοιχτών, κλειστών και ημι-ανοιχτών) του $\mathbb{R}$ και αν $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ είναι το (υπάρχον) σ-σώμα που περιέχει την κλάση E, τότε το $\mathcal{B}$ λέγεται φυλή ή πεδίο Borel του $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ και ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ λέγεται «η πραγματική ευθεία του Borel».

Ονομάζουμε (μονοδιάστατη, πραγματική) τ.μ. X μια μετρήσιμη απεικόνιση από τον πιθανοθεωρητικό χώρο (Ω,F,P) στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, δηλ. $X: (\Omega,F,P) \to (\mathbb{R},\mathcal{B})$,
τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να είναι $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in F$, (Ι).

Ισοδύναμα με την ανωτέρω συνθήκη (Ι) ισχύει ότι για να είναι τ.μ. μια συνάρτηση X(ω), αρκεί το σύνολο $X^{-1}(-\infty, x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, να είναι ένα ενδεχόμενο του Ω.
Η συνθήκη (Ι) δεν απέχει από τη συνθήκη που εξασφαλίζει τη συνέχεια μιας συνάρτησης (η αντίστροφη εικόνα ενός ανοικτού είναι ένα ανοικτό).

Αποδεικνύεται ότι αν Χ(ω) είναι μια τυχαία μεταβλητή τότε θα ισχύει, $\forall I = (-\infty, x] \in \mathcal{B} \Rightarrow X^{-1}(I) \in F$,

δηλ. οι αντίστροφες εικόνες των υποδιαστημάτων $I = (-\infty, x]$ του πεδίου Borel $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}$ είναι ενδεχόμενα.

Συμπερασματικά, τ.μ. Χ είναι μια απεικόνιση,

$$X : (\Omega, F, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}), \text{ με } X^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq F \text{ και } P(I)=P(X^{-1}(I)),\ I \in \mathcal{B}.$$

Υπάρχουν βέβαια συναρτήσεις Χ(ω) που δεν είναι τ.μ., όπως υπάρχουν και υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που δεν είναι σύνολα του πεδίου του Borel, (που δεν έχουν όμως καμιά πρακτική αλλά μόνο θεωρητική σημασία και δεν θα ασχοληθούμε).

Τέλος, αν σε κάθε σημείο $\omega \in \Omega$ αντιστοιχίσουμε ένα σημείο του ν-διάστατου χώρου $\mathbb{R}^{\nu}$, (ν=2,3,…), τότε μιλάμε για μια *ν-διάστατη τυχαία μεταβλητή (ή ένα τυχαίο διάνυσμα).*

3.2. Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας ή Κατανομή Πιθανότητας Διακριτής τ.μ.

Ονομάζουμε ***Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας*** *(probability density function-pdf),* ή
Κατανομή Πιθανότητας *(probability distribution)* ***μιας Διακριτής τ.μ***. X ,
μια συνάρτηση που τη συμβολίζουμε P ή f, με πεδίο ορισμού το διακριτό σύνολο $X(\Omega)=\{x_0, x_1, ..., x_\nu, ...\}$ και πεδίο τιμών το διάστημα [0,1], δηλ.

$$\boxed{\begin{array}{l} P \equiv f : X(\Omega) \subseteq \mathbb{R} \to [0,1], \\ x = x_\nu = X(\omega) \mapsto f(x) = P(X = x_\nu) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_\nu\}), \quad \nu = 0,1,2,.. \end{array}} \quad \textbf{(2)}$$

που ικανοποιεί τις εξής 2 ιδιότητες:

(i) $f(x_\nu) \geq 0, \quad \forall x_\nu \in X(\Omega) \quad \text{και} \quad f(x) = 0, \ \forall x \notin X(\Omega)$, **(2α)**

(ii) $P(X \in B) = \sum\limits_{x \in B} P(x), \quad \forall B \subseteq X(\Omega)$.

Παρατηρήσεις

1) Από τον παραπάνω ορισμό της Κατανομής Πιθανότητας μιας διακριτής τ.μ., εύκολα προκύπτει ότι, $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} P(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f(x_\nu) = 1$. **(2β)**

2) Τα ενδεχόμενα $[X \leq x]$ και $[X > x]$, όπως και τα $[X \geq x]$ και $[X < x]$, είναι συμπληρωματικά για κάθε x, δηλ. ισχύει $[X \leq x]' = [X > x]$ και $[X < x]' = [X \geq x]$. Συνεπώς από τις ιδιότητες της πιθανότητας, είναι:
$P([X \leq x]) = 1 - P([X > x])$ και $P([X \geq x]) = 1 - P([X < x])$. **(2γ)**

Παραδείγματα *(στην Κατανομή Πιθανότητας Διακριτής τ.μ.)*

1) Να εξεταστεί αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι Κατανομές Πιθανότητας:

$$f(x) = \tfrac{x-2}{2}, \quad g(x) = \tfrac{x^2}{5} \quad \text{και} \quad h(x) = \tfrac{x}{2}, \quad \text{όταν } x = 0,1,2 .$$

Λύση

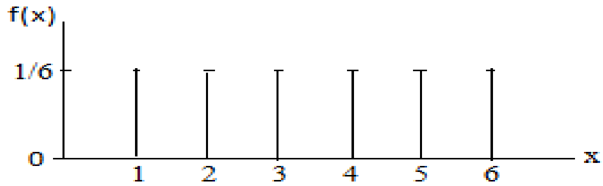
Η συνάρτηση f(x) δεν μπορεί να είναι Κατανομή Πιθανότητας γιατί f(0)=-1<0.
Η συνάρτηση g(x) μπορεί να είναι Κατανομή Πιθανότητας γιατί $g(x) \geq 0, \ \forall x$, και το άθροισμα των 3 μη-αρνητικών τιμών των πιθανοτήτων είναι, $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} P(x) = \sum\limits_{x=0,1,2} g(x) = \tfrac{0}{5} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{4}{5} = 1$.
Η συνάρτηση h(x) δεν μπορεί να είναι Κατανομή Πιθανότητας, γιατί ενώ $h(x) \geq 0, \ \forall x$, όμως το άθροισμα των 3 μη-αρνητικών τιμών των πιθανοτήτων δεν είναι 1, αφού: $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} P(x) = \sum\limits_{x=0,1,2} h(x) = \tfrac{0}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{2} = \tfrac{3}{2} \neq 1$.

2) Να βρεθεί η Κατανομή Πιθανότητας f καθώς και η γραφική παράσταση της f , της τ.μ. X που εκφράζει το π.τ. της ανάριψης ενός ζαριού.

Λύση

Προφανώς, $X:\omega \in \Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \to X(\omega) = x \in \{1,2,3,4,5,6\} = X(\Omega)$ είναι διακριτή τ.μ. που εκφράζει την ανάριψη ενός ζαριού, οπότε η αντίστοιχη Κατανομή Πιθανότητας είναι: $f(x) = \frac{1}{6}$, για $x = 1,2,3,4,5,6$,

και έχει γραφική παράσταση,



3) Αν X είναι η τ.μ. που εκφράζει το άθροισμα των ενδείξεων της ταυτόχρονης ανάριψης δύο ζαριών, να βρεθεί η αντίστοιχη Κατανομή Πιθανότητας f καθώς και το γράφημα αυτής.

Λύση

Θεωρώντας το π.τ. της ανάριψης 2 ζαριών, έχουμε προφανώς Ω={(1,1),(1,2),(1,3),…,(2,1),(2,2),…,(5,6),(6,5),(6,6)} και μέτρο-νόμο πιθανότητας, $P(\omega)= \frac{1}{36}$, $\forall \omega \in \Omega$. Ενδιαφερόμενοι για το άθροισμα των ενδείξεων των 2 ζαριών, τότε μια κατάλληλη απεικόνιση είναι η διακριτή τ.μ. $X:\omega \in \Omega \to X(\omega) = x \in X(\Omega) = \{2,3,...,12\} \subseteq \mathbb{N}$.

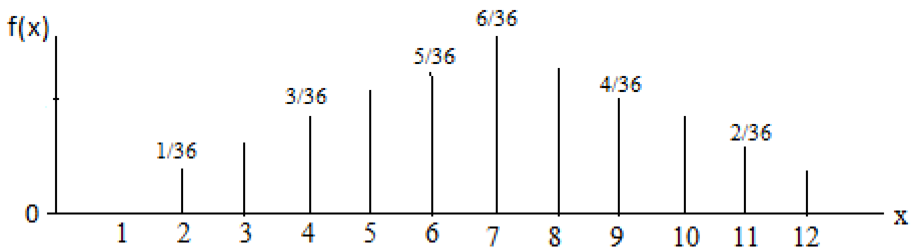
Για να βρούμε την πιθανότητα-μέτρο μιας οποιασδήποτε τιμής x της X, αρκεί να μετρήσουμε τα ω που πραγματοποιούν αυτή την τιμή, όπως π.χ. P(X=5)=P((1,4),(4,1),(2,3),(3,2))= $\frac{4}{36}$, P(X=3)=P((1,2),(2,1))= $\frac{2}{36}$, κτλ.

Έτσι, για να οριστεί η πιθανότητα στη τ.μ. X, μεταφέρεται ταυτόσημα το μέτρο πιθανότητας από το Ω στο X(Ω), δηλ. $P(X=x)=P(X^{-1}(x))=P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$.

Οπότε η αντίστοιχη Κατανομή Πιθανότητας f(x)=P(X=x) δίνεται από τον πίνακα,

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

που έχει γραφική παράσταση,



Σημείωση

Είναι $P(X<10)=P\big((1,1),(1,2),(2,1),\ldots,(6,2),(2,6),(6,3),(3,6)\big)=\frac{30}{36}$ και $P(X\geq 10)=P\big((4,6),(6,4),(5,5),(6,5),(5,6),(6,6)\big)=\frac{6}{36}$, δηλαδή

$P(X<10)+P(X\geq 10)=\frac{30}{36}+\frac{6}{36}=1$,

αφού τα διαστήματα είναι συμπληρωματικά $[X\geq 10]'=[X<10]$ ως προς X(Ω), ενώ γενικά ισχύει $P([X\geq x])=1-P([X<x])$.

4) Θεωρούμε το π.τ. της ανάριψης ενός νομίσματος και έστω X η τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό των ρίψεων που χρειάζονται μέχρι να εμφανιστεί Κ (Κεφαλή) για πρώτη φορά. Ζητείται να βρεθεί η Κατανομή Πιθανότητας της X.

Λύση

Ο αντίστοιχος δειγματοχώρος θα είναι διακριτός, αφού χρειάζεται φυσικά πεπερασμένος αριθμός ρίψεων για να εμφανιστεί για πρώτη φορά Κ.

Έτσι, έχουμε τη διακριτή τ.μ. X τέτοια ώστε, X=1 σημαίνει ότι στο α' ρίξιμο εμφανίζεται Κ, X=2 σημαίνει ότι στο β' ρίξιμο εμφανίζεται Κ, κτλ.

Δεδομένου ότι η εμφάνιση Κ ή Γ είναι ισοπίθανη και οι επαναλήψεις του π.τ. είναι ανεξάρτητες, έχουμε:

$P(X=1)=\frac{1}{2}$, $P(X=2)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}$, $P(X=3)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{2^3},\ldots$

Έτσι, προκύπτει ότι η Κατανομή Πιθανότητας της τ.μ. X, είναι:

$$P(X=x)=f(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}=\frac{1}{2^x},\quad (x=1,2,3,\ldots).$$

5) Να βρεθεί η Κατανομή Πιθανότητας f της τ.μ. X που εκφράζει το π.τ. της ανάριψης ενός νομίσματος 3 φορές, όπου μας ενδιαφέρει το πλήθος των Κ.

Λύση

Προφανώς,

$$X:\omega\in\Omega=\{\Gamma\Gamma\Gamma,\Gamma\Gamma K,\Gamma K\Gamma,K\Gamma\Gamma,\Gamma KK,K\Gamma K,KK\Gamma,KKK\}\to$$
$$\to X(\omega)=x\in\{0,1,2,3\}=X(\Omega)$$

είναι η διακριτή τ.μ. που εκφράζει την ανάριψη ενός κέρματος 3 φορές (ως προς Κ), όπου

$$\{\Gamma\Gamma\Gamma\}\mapsto X=0$$
$$\{\Gamma\Gamma K,\Gamma K\Gamma,K\Gamma\Gamma\}\mapsto X=1$$
$$\{\Gamma KK,K\Gamma K,KK\Gamma\}\mapsto X=2$$
$$\{KKK\}\mapsto X=3.$$

Οπότε η αντίστοιχη Κατανομή Πιθανότητας f(x)=P(X=x) δίνεται από τον πίνακα,

x	0	1	2	3
f(x)=P(X=x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Ας σημειωθεί ότι πάντα ισχύει: $\sum_{x\in X(\Omega)}P(X=x)=\sum_{x=0}^{3}f(x)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1$.

6) Έστω η τ.μ. X με αντίστοιχη Κατανομή Πιθανότητας,

$$f(x) = P(X = x) = \frac{c}{3^x}, \quad (x = 0,1,2,...).$$

α) Να προσδιοριστεί η σταθερά c.

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X \geq 10)$.

γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X \in A)$, όταν $A = \{x \,/\, x = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N}\}$

Λύση

α) Από την ιδιότητα (2α) έχουμε:

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(x) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1 = \sum_{x=0}^{\infty} (\frac{c}{3^x}) = c\sum_{x=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^x = c\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3c}{2} \Leftrightarrow \frac{3c}{2} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}.$$

Άρα, η Κατανομή Πιθανότητας της δοθείσης τ.μ. X, είναι:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{c}{3^x}, \quad (x = 0,1,2,...).$$

Σημείωση: Το $\sum_{x=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^x$ παραπάνω, είναι το άθροισμα των άπειρων όρων της φθίνουσας γεωμετρικής προόδου $(\frac{1}{3})^x$ με πρώτο όρο α=1 και λόγο $\lambda = \frac{1}{3}$,

οπότε κατά τα γνωστά από τις φθίνουσες Γεωμ. Προόδους είναι, $\sum_{\infty} = \frac{\alpha}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

β) $P(X \geq 10) = \sum_{x=10}^{\infty} f(x) = \frac{2}{3}\sum_{x=10}^{\infty} (\frac{1}{3})^x = \frac{2}{3}(\frac{\frac{1}{3^{10}}}{1-\frac{1}{3}}) = \frac{2}{3}(\frac{\frac{1}{3^{10}}}{\frac{2}{3}}) = \frac{1}{3^{10}}$.

γ) $P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X{=}x/\ x{=}2k{+}1,\ k \in \mathbb{N}) = \sum_{k=0}^{\infty} f(2k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3}(\frac{1}{3^{2k+1}}) =$

$$= \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^{2k+1} = \frac{2}{3}(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}) = \frac{1}{4}.$$

3.3. Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας ή Κατανομή Πιθανότητας Συνεχούς τ.μ.

Ονομάζουμε ***Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας*** ή ***Κατανομή Πιθανότητας Συνεχούς τ.μ.*** X,
μια συνάρτηση P ή f, με πεδίο ορισμού το συνεχές σύνολο $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το διάστημα [0,1], που ορίζεται από τη σχέση,

$$\boxed{P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}}, \qquad \textbf{(3)}$$

και ικανοποιεί τις ιδιότητες:

α) $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

β) $P(X \in B) = \int_{x \in B} f(x)dx$, για κάθε διάστημα $B \subseteq X(\Omega)$.

Σημείωση: Από τον παραπάνω ορισμό της Κατανομής Πιθανότητας μιας συνεχούς τ.μ., προκύπτει ότι,

$$\int_{x \in \mathbb{R}} f(x)dx = 1, \quad \text{ενώ} \quad P(X = x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(3α)}$$

Παρατηρήσεις

α) Γενικά μια τ.μ. X αντιστοιχίζει τα ενδεχόμενα $\omega \in \Omega$ σε πραγματικούς αριθμούς (δηλ. αριθμητικοποιεί τα ενδεχόμενα $\omega \in \Omega$ σε $X(\omega) \in \mathbb{R}$),
ενώ η κατανομή πιθανότητας $P \equiv f$ αντιστοιχίζει τα αριθμητικοποιημένα αυτά ενδεχόμενα $X(\omega) = x \in X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ στις πιθανότητές τους $P(X = x) \in [0,1]$.

Συμπερασματικά, η τ.μ. X ενός π.τ. και η κατανομή πιθανότητας αυτής $P(X = x) \equiv f(x)$ συνδέουν συναρτησιακά τον δειγματοχώρο Ω με τις πιθανότητες των ενδεχομένων, δηλ. είναι η σύνθεσή τους,

$$P \circ X : \omega \in \Omega \to P(X(\omega)) = P(x) \in [0,1].$$

β) Επίσης γενικά, για να είναι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η Κατανομή Πιθανότητας κάποιας τ.μ. X, θα πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες:

$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, και

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1, \text{ (όταν X διακριτή τ.μ.)} \quad \text{ή} \quad \int_{x \in \mathbb{R}} f(x)dx = 1, \text{ (όταν X συνεχής)}. \qquad \textbf{(3β)}$$

Παραδείγματα *(στην Κατανομή Πιθανότητας Συνεχούς τ.μ.)*

1) Μια συνεχής τ.μ. X έχει Κατανομή Πιθανότητας f , που δίνεται από τον τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{όταν } x\le -1 \\ -cx, & \text{όταν } -1<x\le 0 \\ ce^{-x}, & \text{όταν } x>0 \end{cases}$$

α) Να προσδιοριστεί η σταθερά c.

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα P(X>0).

γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα P(X< $\frac{-1}{2}$).

Λύση

α) Από την ιδιότητα (3α) είναι:

$$1=\int_{x\in X(\Omega)} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{-1} 0\ dx+\int_{-1}^{0}(-cx)dx+\int_{0}^{+\infty} ce^{-x}dx=$$

$$=\left[\frac{-c}{2}x^2\right]\Bigg|_{-1}^{0}+\left[-ce^{-x}\right]\Big|_{0}^{+\infty}=\left[\frac{c}{2}\right]+\left[c\right]=\frac{3c}{2}\Leftrightarrow\frac{3c}{2}=1\Leftrightarrow c=\frac{2}{3}.$$

$$\text{β) } P(X>0)=\int_{0}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} ce^{-x}dx=\frac{2}{3}\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx=\frac{2}{3}\left[-e^{-x}\right]\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{2}{3}[-0+1]=\frac{2}{3}.$$

$$\text{γ) } P(X<\frac{-1}{2})=\int_{-\infty}^{-1/2} f(x)dx=\int_{-\infty}^{-1} 0\ dx+\int_{-1}^{-1/2}(-cx)dx=\frac{-2}{3}\int_{-1}^{-1/2} xdx=\frac{-2}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{-1}^{-1/2}=\frac{1}{4}.$$

2) Να εξεταστεί αν είναι μια Κατανομή Πιθανότητας η συνάρτηση,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{8}+\frac{1}{4}, & \text{όταν } x\in[-2,2] \\ 0, & \text{όταν } x\notin[-2,2]. \end{cases}$$

Λύση

Σύμφωνα με την (3β), για να είναι η f μια Κατανομή Πιθανότητας πρέπει να ισχύει: $f(x)\geq 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$ και $\sum_{x\in\mathbb{R}} P(x)=1$ ή $\int_{x\in\mathbb{R}} f(x)dx=1$.

Καταρχήν εύκολα διαπιστώνουμε ότι, $f(x)\geq 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$, (ενώ f είναι αύξουσα και συνεχής, εκτός για x=2, όπου $f(x^-)=\frac{1}{2}$ και $f(x^+)=0$).

Απομένει λοιπόν να εξετάσουμε αν $\int_{x\in\mathbb{R}} f(x)dx=1$, που πράγματι ισχύει αφού,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-2}^{2}(\tfrac{x}{8}+\tfrac{1}{4})dx=\left[\frac{x^2}{16}+\frac{x}{4}\right]\Bigg|_{-2}^{2}=(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})-(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})=1.$$

Συνεπώς, η f είναι η Κατανομή Πιθανότητας μιας συνεχούς τ.μ. Χ.

3) Να εξεταστεί για ποια τιμή της παραμέτρου α, είναι μια Κατανομή Πιθανότητας η συνάρτηση,

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x(1-x), & \text{όταν } x\in[0,1]\\ 0, & \text{όταν } x\notin[0,1].\end{cases}$$

Λύση

Κατά την (3β), πρώτα διαπιστώνουμε ότι για $\alpha\geq 0$, είναι $f(x)\geq 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Κατά την (3β) πρέπει επίσης να ισχύει για συνεχή τ.μ.,, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$,

δηλ.

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0}^{1}\alpha x(1-x)dx=\alpha\int_{0}^{1}(x-x^2)dx=\alpha\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{\alpha}{6}\Leftrightarrow \alpha=6.$$

Άρα, η τιμή της παραμέτρου πρέπει να είναι, α=6.

4) Να προσδιοριστεί η παράμετρος κ, ώστε να είναι μια Κατανομή Πιθανότητας η συνάρτηση,

$$f(x)=\frac{\kappa}{x^2+1},\quad x\in\mathbb{R},\ (\text{κατανομή Cauchy}).$$

Λύση

Προφανώς σύμφωνα με την (3β), για $\kappa>0$, είναι $f(x)\geq 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$,
ενώ πρέπει

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\kappa}{x^2+1}dx=\kappa\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\kappa\left[\arctan(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}=\kappa\pi\Leftrightarrow\kappa=\frac{1}{\pi}.$$

Άρα, η τιμή της παραμέτρου πρέπει να είναι, $\kappa=\frac{1}{\pi}$.

3.4. Αθροιστική Κατανομή Πιθανότητας μιας τ.μ.

Ονομάζουμε ***Αθροιστική Κατανομή Πιθανότητας μιας τ.μ.*** X, τη (γενικευμένη) συνάρτηση F(x) που δίνει αθροιστικά τις πιθανότητες για κάθε $X \le x$,
δηλ.

$$F : x \in X(\Omega) \subseteq \mathbb{R} \to F(x) = P(X \le x) \in [0,1],$$

τέτοια ώστε,

$$\boxed{F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} \sum\limits_{X \le x} f(x), & \text{αν X διακριτή τ.μ.} \\ \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt, & \text{αν X συνεχής τ.μ.} \end{cases}} \quad \textbf{(4)}$$

Η Αθροιστική Κατανομή Πιθανότητας μιας τ.μ. αποδεικνύεται ότι ικανοποιεί τις ***ιδιότητες***:

(i) $0 \le F(x) \le 1, \ (x \in \mathbb{R})$, **(4α)**

(ii) $F(x) = P(X \le x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}$ είναι αύξουσα συνάρτηση,
δηλ. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$, **(4β)**

(iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, **(4γ)**

(iv) Για τα συμπληρωματικά (ή αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα)
$X \le x$ και $X > x$, ισχύει, $P(X \le x) + P(X > x) = 1 = P(-\infty < X < +\infty)$,
δηλ.

$$\boxed{P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)}, \quad \textbf{(4δ)}$$

(v) ***Για μια συνεχή τ.μ. ισχύει***:

$$\boxed{F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)} \quad \text{και}$$

$$\boxed{P(\alpha < x < \beta) = P(\alpha \le x < \beta) = P(\alpha < x \le \beta) = P(\alpha \le x \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = F(\beta) - F(\alpha)} \quad \textbf{(4ε)}$$

όπου προφανώς το ορισμένο ολοκλήρωμα εκφράζει γεωμετρικά την πιθανότητα ως εμβαδόν.

Οπότε, $P(X = \alpha) = P(\alpha = x = \alpha) = F(\alpha) - F(\alpha) = 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$, δηλ. έχουμε ένα ενδεχόμενο που δεν είναι αδύνατο, αλλά έχει πιθανότητα 0. Αυτό παρότι καταρχήν φαίνεται παράδοξο, μπορεί να ερμηνευθεί αν παρομοιαστεί γεωμετρικά με ένα σημείο που ενώ δεν είναι κενό εντούτοις το μήκος του είναι μηδέν.

(vi) ***Για μια διακριτή τ.μ. ισχύει***:

$$\boxed{f(x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots} \quad \textbf{(4ζ)}$$

Ασκήσεις-Παραδείγματα *(στην Αθροιστική Κατανομή Πιθανότητας)*

1) Να βρεθεί η Αθροιστική Κατανομή Πιθανότητας F(x) καθώς και το γράφημα αυτής, όταν η τ.μ. Χ εκφράζει το π.τ. όπου ρίχνουμε δύο νομίσματα ταυτόχρονα και μας ενδιαφέρει ο αριθμός των Κ που εμφανίζονται.
Λύση

Στο π.τ. όπου ρίχνουμε δύο νομίσματα ταυτόχρονα και μας ενδιαφέρει ο αριθμός των Κ, η αντίστοιχη διακριτή τ.μ. Χ είναι:

$$X : \omega \in \Omega = \{\Gamma\Gamma, K\Gamma, \Gamma K, KK\} \to X(\omega) = x \in X(\Omega) = \{0,1,2\} \subseteq \mathbb{N},$$

δηλ. Χ(ΓΓ)=0, Χ(ΓΚ)=Χ(ΚΓ)=1, Χ(ΚΚ)=2.

Προφανώς είναι, $P(\Gamma\Gamma)=P(K\Gamma)=P(\Gamma K)=P(KK)=\frac{1}{4}$

και

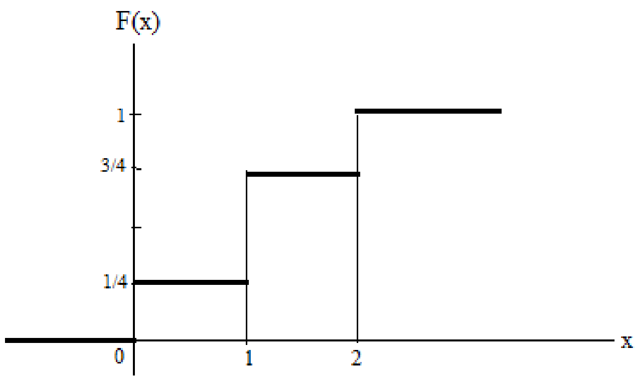
$$x < 0 \Rightarrow F(x) = P(X < 0) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 0\} = P(\varnothing) = 0,$$
$$x \in [0,1) \Rightarrow F(x) = P(0 \le X < 1) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 1\} = P(\Gamma\Gamma) = \tfrac{1}{4},$$
$$x \in [1,2) \Rightarrow F(x) = P(1 \le X < 2) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 2\} = P(\Gamma\Gamma \cup \Gamma K \cup K\Gamma) = \tfrac{3}{4},$$
$$x \in [2,\infty) \Rightarrow F(x) = P(2 \le X < \infty) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < \infty\} = P(\Omega) = 1.$$

Συνεπώς, η Αθροιστική Κατανομή Πιθανότητας της τ.μ. Χ, είναι:

$$F(x) = P(X \le x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} = \left\{ \sum_{X \le x} f(x), \quad \text{αν } X \text{ διακριτή τ.μ.} \right\} \Leftrightarrow$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x<0 \\ \frac{1}{4}, & \text{όταν } 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{4}, & \text{όταν } 1 \le x < 2 \\ 1, & \text{όταν } 2 \le x \end{cases}$$

Τέλος, η γραφική παράσταση της Αθροιστικής Κατανομής Πιθανότητας F(x) είναι:



2) Δίνεται ότι η Αθροιστική Κατανομή Πιθανότητας μιας τ.μ. (εκθετική) X, είναι:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{όταν } x<0\\ 1-e^{-x}, & \text{όταν } 0\le x.\end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες: $P(1<X\le 2)$, $P(X>3)$, $P(X<5)$, $P(X=4)$.

Λύση

Είναι:

$$P(1<X\le 2)=F(2)-F(1)=1-e^{-2}-(1-e^{-1})=e^{-1}-e^{-2},$$

$$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-F(3)=1-(1-e^{-3})=e^{-3},$$

$$P(X<5)=F(5)=1-e^{-5} \quad \text{και} \quad P(X=4)=F(4)-F(4)=0.$$

3) Δίνεται ότι η Αθροιστική Κατανομή Πιθανότητας μιας τ.μ. X είναι:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{όταν } x<0\\ \frac{x^2}{2}, & \text{όταν } 0\le x<1\\ \frac{3}{4}, & \text{όταν } 1\le x\le 2\\ \frac{x+1}{4}, & \text{όταν } 2\le x\le 3\\ 1, & \text{όταν } x\ge 3\end{cases}$$

Να υπολογιστούν:

α) $P(X=\frac{1}{2})$, β) $P(X=1)$, γ) $P(X\le 1)$, δ) $P(X<1)$, ε) $P(X>2)$, ζ) $P(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2})$.

Λύση

Η τ.μ. X εύκολα διαπιστώνουμε ότι αλλού είναι συνεχής και αλλού ασυνεχής, οπότε έχουμε:

α) $P(X=\frac{1}{2})=0$, (γιατί η X στο $\frac{1}{2}$ είναι συνεχής).

β) $P(X=1)=F(1)-\lim\limits_{h\to 0^+}F(1-h)=\frac{3}{4}-\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{(1-h)^2}{2}=\frac{3}{4}-\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{(1-2h+h^2)}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$

Σημείωση: Ας σημειωθεί εδώ ότι, $P(X=1)=\frac{1}{4}\neq 0$, διότι η τ.μ. X στο 1 είναι ασυνεχής. Δηλ. ενώ σε κάθε συνεχές σημείο x ισχύει, $P(X=X)=0$ και

$$P(\alpha<x<\beta)=P(\alpha\le x<\beta)=P(\alpha<x\le\beta)=P(\alpha\le x\le\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(t)dt,$$

για σημείο ασυνέχειας x_0 ισχύει, $P(X=x_0)=P(X\le x_0)-P(X<x_0)=F(x_0)-F(x_0^-)$,

όπου $F(x_0^-)=\lim\limits_{h\to 0^+}F(x_0-h)$ είναι το αριστερό πλευρικό όριο της F(x) στο x_0).

γ) $P(X \le 1) = F(1) = \frac{3}{4}$.

δ) $P(X < 1) = F(1) = \frac{1}{2}$, ή αλλιώς $P(X < 1) = P(X \le 1) - P(X = 1) = F(1) - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

ε) $P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-F(2)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

ζ) $P(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2})=F(\frac{5}{2})-F(\frac{1}{2})=\frac{\frac{5}{2}+1}{4}-\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}=\frac{3{,}5}{4}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$, σύμφωνα με την ιδιότητα (4)-(v).

Σημείωση

Σ' αυτό το παράδειγμα βλέπουμε ότι εκτός από τις αμιγείς διακριτές ή συνεχείς τ.μ. υπάρχουν και άλλες (μικτές) τ.μ., όπου η τ.μ. X δεν είναι παντού συνεχής, αλλά ούτε παντού διακριτή. Τέτοιες όμως τ.μ. ενδιαφέρουν περισσότερο τα σχετικά θεωρητικά προβλήματα παρά τις πρακτικές εφαρμογές και επομένως εμείς δεν θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα.

4) Αρκετές φορές χρειάζεται να υπολογίσουμε την κατανομή μιας τ.μ. Y η οποία είναι συνάρτηση μιας γνωστής τ.μ. X, δηλ. $Y=\varphi(X)$,
όπως π.χ. $Y=X^2$, $Y=\ln(X)$, $Y=\sin(X)$, $Y=1/X$, $Y=2X+3$, $Y=X^2+1$, είτε $Z=X+Y$, $Z=XY$, κτλ.

Π.χ.
Η τ.μ. X έχει κατανομή πιθανότητας:

$$P(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{όταν } x = -1 \\ \frac{1}{2}, & \text{όταν } x = 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{όταν } x = 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ζητείται να βρεθεί η κατανομή πιθανότητας της τ.μ. $Y=X^2$.

Λύση

Επειδή η τ.μ. X είναι διακριτή, έχουμε:

$P(Y=0)=P(X^2=0)=P(X=0)=\frac{1}{2}$,

$P(Y=1)=P(X^2=1)=P(X=\pm 1)=P(X=1)+P(X=-1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Συνεπώς, $$P(y) = g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{όταν } y = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{όταν } y = 1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

5) Να βρεθεί η Αθροιστική Κατανομή Πιθανότητας F(x) καθώς και το γράφημά της, όταν η τ.μ. X εκφράζει το π.τ. της ανάριψης ενός ζαριού.

Λύση

Όπως ήδη γνωρίσαμε σε προηγούμενο παράδειγμα σχετικά με αυτό το π.τ., η τ.μ. X που το εκφράζει, είναι:

$$X : \omega \in \Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \to X(\omega) = x \in \{1,2,3,4,5,6\} = X(\Omega),$$

που είναι η διακριτή και έχει αντίστοιχη Κατανομή Πιθανότητας,

$$f(x) = P(X = x) = \tfrac{1}{6}, \text{ για } x = 1,2,3,4,5,6,$$

ενώ

$x < 1 \Rightarrow F(x) = P(X < 1) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 1\} = P(\varnothing) = 0$,

$x \in [1,2) \Rightarrow F(x) = P(X < 2) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 2\} = P(X = 1) = \tfrac{1}{6}$,

$x \in [2,3) \Rightarrow F(x) = P(X < 3) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 3\} = P(1) + P(2) = \tfrac{2}{6}$,

$x \in [3,4) \Rightarrow F(x) = P(X < 4) = P(1) + P(2) + P(3) = \tfrac{3}{6}$,

$x \in [4,5) \Rightarrow F(x) = P(X < 5) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \tfrac{4}{6}$

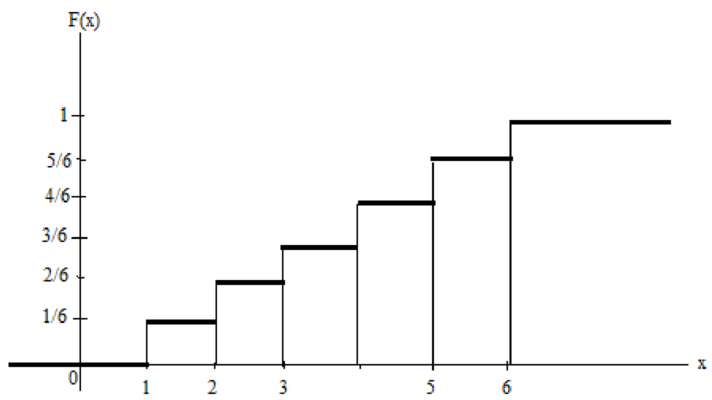
$x \in [5,6) \Rightarrow F(x) = P(X < 6) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = \tfrac{5}{6}$

$x \in [6,\infty) \Rightarrow F(x) = P(X < \infty) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(5) = \tfrac{6}{6} = 1$

Συνεπώς, η Αθροιστική Κατανομή Πιθανότητας F της τ.μ. X, είναι,

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 = F(0), & \text{όταν } x < 1 \\ \frac{1}{6} = F(1), & \text{όταν } 1 \le x < 2 \\ \frac{2}{6} = F(2), & \text{όταν } 2 \le x < 3 \\ \frac{3}{6} = F(3), & \text{όταν } 3 \le x < 4 \\ \frac{4}{6} = F(4), & \text{όταν } 4 \le x < 5 \\ \frac{5}{6}, = F(5) & \text{όταν } 5 \le x < 6 \\ \frac{6}{6} = 1 = F(6), & \text{όταν } 6 \le x < \infty \end{cases}$$

που έχει το ακόλουθο (σκαλωτό) γράφημα:



Σημείωση
Στις διακριτές τ.μ. η αντίστοιχη Αθροιστική Κατανομή Πιθανότητας είναι σκαλωτή συνάρτηση (δηλ. το γράφημά της αποτελείται από διάφορα ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα στον άξονα των x),
ενώ στις συνεχείς τ.μ. η αντίστοιχη Αθροιστική Κατανομή Πιθανότητας είναι συνεχής συνάρτηση (ή γενικά κατά διαστήματα συνεχής με αριθμήσιμο το πολύ πλήθος σημείων ασυνέχειας).

6) Μια συνεχής τ.μ. X έχει Κατανομή Πιθανότητας τη συνάρτηση,

$$P(x) = f(x) = \begin{cases} cx, & \text{όταν } x \in [0,6] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ζητούνται:
α) Να προσδιοριστεί η παράμετρος c,
β) Να βρεθεί η αντίστοιχη Αθροιστική Κατανομή Πιθανότητας F(x),
γ) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες: $P(1 \le X \le 3)$, $P(0 \le X \le 5)$, $P(X > 4)$.
Λύση

α) Αφού η δοθείσα συνάρτηση f(x) είναι Κατανομή Πιθανότητας, άρα κατά την (3α) θα πρέπει να ισχύει:

$$1 = \int_{x \in X(\Omega)} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{6} (cx)dx + \int_{6}^{+\infty} 0\,dx = c\int_{0}^{6} xdx =$$

$$= c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^6 = c\left[\frac{36}{2} - \frac{0}{2}\right] = 18c \Leftrightarrow 18c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{18}.$$

Συνεπώς,

$$P(X = x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}x, & \text{όταν } x \in [0,6] \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

β) Από τον τύπο (4), είναι:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \tfrac{1}{18}tdt = \tfrac{1}{18}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \tfrac{1}{18}\frac{x^2}{2} = \tfrac{1}{36}x^2.$$

Συνεπώς, η Αθροιστική Κατανομή Πιθανότητας F(x) της τ.μ. X, είναι,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x < 0 \\ \frac{1}{36}x^2, & \text{όταν } x \in [0,6] \\ 1, & \text{όταν } x > 6. \end{cases}$$

γ) $P(1 \le X \le 3) = \int_1^3 \tfrac{1}{18} x dx = \tfrac{1}{18}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$,

είτε

$$P(1 \le X \le 3) = F(b) - F(a) = F(3) - F(1) = \tfrac{1}{36}3^2 - \tfrac{1}{36}1^2 = \tfrac{8}{36} = \tfrac{2}{9}.$$

Επίσης, $P(0 \le X \le 5) = \int_0^5 \tfrac{1}{18} x dx = \tfrac{1}{18}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \frac{25}{36}$,

είτε

$$P(0 \le X \le 5) = F(5) - F(0) = \tfrac{1}{36}5^2 - \tfrac{1}{36}0^2 = \tfrac{25}{36}.$$

Τέλος,

$$P(X > 4) = 1 - P(X \le 4) = 1 - F(4) = 1 - \int_0^4 \tfrac{1}{18} x dx = 1 - \tfrac{1}{18}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 1 - \frac{16}{36} = \frac{20}{36}.$$

7) Δίνεται ότι η Αθροιστική Κατανομή Πιθανότητας μιας συνεχούς τ.μ X, είναι:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } -\infty < x < 0 \\ x, & \text{όταν } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{όταν } 1 \le x < \infty \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η κατανομή πυκνότητας πιθανότητας f(x) της τ.μ X.

Λύση

Επειδή η τ.μ X είναι συνεχής, άρα κατά τις γνωστές ιδιότητες παραγωγίζοντας την F(x) θα βρούμε την f(x), δηλαδή:

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} x, & \text{όταν } 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{όταν } 0 < x \text{ ή } x > 1. \end{cases}$$

8) Δίνεται ότι η κατανομή πυκνότητας πιθανότητας μιας συνεχούς τ.μ X, είναι:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3(1 - x), & \text{όταν } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογιστεί,

α) Η αθροιστική κατανομή πιθανότητας F(x) της τ.μ X, και

β) Μέσω της F(x) να υπολογιστούν οι πιθανότητες,

$$P(X \le \tfrac{1}{2}), \quad P(X \ge \tfrac{4}{5}), \quad P(\tfrac{1}{3} \le X \le \tfrac{2}{3}).$$

Λύση

α) Υπολογίζουμε καταρχήν την παράμετρο a, από τη γνωστή σχέση που πρέπει να ικανοποιεί κάθε κατανομή πιθανότητας μιας συνεχούς τ.μ., δηλ.

$$\int_{x\in\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 ax^3(1-x)dx = 1 \Leftrightarrow a\int_0^1 x^3dx - a\int_0^1 x^4dx = 1 \Leftrightarrow a[\frac{x^4}{4}]_0^1 - a[\frac{x^5}{5}]_0^1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4} - \frac{a}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{5a-4a}{20} = 1 \Leftrightarrow a = 20.$$

Συνεπώς, η κατανομή πιθανότητας της δοθείσης συνεχούς τ.μ X, είναι:

$$f(x) = 20x^3(1-x), \quad \text{όταν} \quad 0 < x < 1, \ (\text{και } 0 \text{ αλλού}).$$

Επομένως από τις γνωστές ιδιότητες, ολοκληρώνοντας την f(x) βρίσκουμε την F(x), δηλαδή

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x 20t^3(1-t)dt = 20\int_0^x t^3dt - 20\int_0^x t^4dt =$$

$$= 20\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^x - 20\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^x = 5x^4 - 4x^5.$$

β) Υπολογισμός των ζητούμενων πιθανοτήτων:

$P(X \le \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = 5(\frac{1}{2})^4 - 4(\frac{1}{2})^5 = \frac{3}{16}$,

$P(X \ge \frac{4}{5}) = 1 - P(X < \frac{4}{5}) = 1 - F(\frac{4}{5}) = 1 - [5(\frac{4}{5})^4 - 4(\frac{4}{5})^5] = \frac{821}{3125}$,

$P(\frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}) = F(\frac{2}{3}) - F(\frac{1}{3}) = [5(\frac{2}{3})^4 - 4(\frac{2}{3})^5] - [5(\frac{1}{3})^4 - 4(\frac{1}{3})^5] = \frac{101}{243}$.

3.5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ (ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ, ΔΙΑΣΠΟΡΑ, κτλ) μιας τ.μ.

Είδαμε ότι όταν γνωρίζουμε την κατανομή πιθανότητας f(x) μιας τ.μ. X, μπορούμε να υπολογίζουμε οποιαδήποτε πιθανότητα μας ενδιαφέρει.
Πρακτικά όμως αυτό δεν είναι πάντα εύκολο και έτσι αρκετές φορές στις εφαρμογές αντί να χρησιμοποιούμε την ίδια την κατανομή f, αρκούμαστε στην εύρεση ορισμένων αριθμητικών δεικτών που χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά της κατανομής και εκφράζουν κάποιες γενικές ιδιότητές της.
Οι σημαντικότεροι από τους χαρακτηριστικούς αυτούς αριθμητικούς δείκτες μιας τ.μ. X, είναι *τα μέτρα θέσης ή κεντρικής τάσης* όπως η Μέση Τιμή E(X)=μ, και τα *μέτρα μεταβλητότητας* όπως η Διασπορά $\sigma^2(X)=V(X)$ και η Απόκλιση σ(X).
Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

1. Μέση Τιμή Διακριτής τ.μ.

Έστω X μια διακριτή τ.μ. που παίρνει τις διακριτές τιμές x_i, (i=1,2,…) με αντίστοιχες πιθανότητες $P(x_i)=p_i=f(x_i)$.

Ονομάζουμε, ***Μέση Τιμή*** *(mean value)* μ(X), ή ***Μαθηματική Ελπίδα*** E(X), ή ***Μέσο*** *(mean)* μ, μιας ***διακριτής*** τ.μ. X, τον πραγματικό αριθμό:

$$\boxed{E(X) = \mu = \sum_i x_i f(x_i)}, \tag{5}$$

(με την προϋπόθεση: $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i| f(x_i) < \infty$).

2. Μέση Τιμή Συνεχούς τ.μ.

Ονομάζουμε (όμοια), ***Μέση Τιμή*** μιας ***συνεχούς*** τ.μ. X με Κατανομή Πιθανότητας f(x), τον πραγματικό αριθμό:

$$\boxed{E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx}, \tag{6}$$

(με την προϋπόθεση: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty$).

3. Διασπορά ή Διακύμανση τ.μ.

Διασπορά *(dispersion)* ή ***Διακύμανση*** *(Variance)* μιας τ.μ. X με κατανομή πιθανότητας f(x) και μέση τιμή E(X)=μ είναι ο πραγματικός αριθμός, $\sigma^2(X) = V(X)$ και πιο συγκεκριμένα:

$$\boxed{\sigma^2(X) = V(X) = E(X-\mu)^2 = \begin{cases} \sum_i [x_i - \mu]^2 f(x_i), & \text{αν X διακριτή τ.μ.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} [x-\mu]^2 f(x), & \text{αν X συνεχής τ.μ} \end{cases}} \tag{7}$$

(με την προϋπόθεση, αντίστοιχα:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} [x_i - \mu]^2 f(x_i) < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} [x-\mu]^2 f(x) dx < \infty).$$

4. Τυπική **Απόκλιση** *(deviation)* της τ.μ. X είναι ο πραγματικός αριθμός,

$$\boxed{\sigma(X) = +\sqrt{\sigma^2(X)} = \sqrt{V(X)}} \qquad \textbf{(8)}$$

5. Ιδιότητες Μέσης Τιμής και Διασποράς μιας τ.μ.

(α) $E(c) = c, \quad E(X + c) = E(X) + c, \quad E(cX) = cE(X), \quad E(cX + k) = cE(X) + k$,

(β) $V(c) = 0, \; V(X + c) = V(X), \; V(cX) = c^2V(X), \; V(cX + k) = c^2V(X)$,
$V(cX + k) = c^2V(X), \quad$ όπου $\quad c, k = (\sigma\tau\alpha\theta.) \in \mathbb{R}$,

(γ) $$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i)^2 f(x_i) - (E(X))^2, & \text{αν } X \text{ διακρ. τ.μ.} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2, & \text{αν } X \text{ συνεχής τ.μ.} \end{cases} \qquad \textbf{(9)}$$

(δ) $V(X) = E[X(X - 1)] + E(X) - (E(X))^2 = E[X(X - 1)] + \mu - \mu^2$.

Παρατηρήσεις

1) *Τα μέτρα θέσης ή κεντρικής τάσης (location measures, central tendency measures)*, όπως η μέση τιμή (μ), η διάμεσος (δ), κτλ, εκφράζουν την τάση της τ.μ. προς μια κεντρική θέση. Όμως παρόλο που τα μέτρα θέσης δίνουν χρήσιμες πληροφορίες για την κατανομή ενός πληθυσμού, δεν είναι συνήθως επαρκή για να τον περιγράψουν ικανοποιητικά.

Έτσι, παράλληλα με τα μέτρα θέσης είναι απαραίτητη συνήθως για την προσέγγιση της κατανομής μιας μεταβλητής και η εξέταση των *μέτρων διασποράς ή μεταβλητότητας (measures of variance-dispersion, measures of variability)*, όπως είναι η διασπορά (σ^2) και η τυπική απόκλιση (σ), δηλ. μέτρων που εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης.

2) Η διασπορά $V(X)=\sigma^2(X)$ είναι η σημαντικότερη παράμετρος μεταβλητότητας και εκφράζει τη συγκεντρωτικότητα των τιμών της τ.μ. X γύρω από τη μέση τιμή αυτής E(X)=μ. Όταν οι τιμές μιας τ.μ. (ή οι τιμές ενός συνόλου παρατηρήσεων) δεν διαφέρουν πολύ από τη μέση τιμή τους τότε η διασπορά είναι μικρή, ενώ η διασπορά μεγαλώνει όσο οι τιμές απομακρύνονται από τη μέση τιμή, (πχ. οι τιμές 49 και 51, όπως και οι τιμές 98 και 2, έχουν μέση τιμή 50, αλλά οι 49 και 51 έχουν μικρή διασπορά ενώ οι 98 και 2 έχουν προφανώς μεγάλη διασπορά.

Συνεπώς, η διασπορά είναι ένας αριθμητικός δείκτης που μας πληροφορεί για το αν οι τιμές της τ.μ. X είναι διασκορπισμένες κοντά ή μακριά από τη μέση τιμή. Έτσι, μικρή διασπορά σημαίνει πολλές τιμές της X κοντά στη μέση τιμή, ενώ μεγάλη διασπορά V(X) σημαίνει πολλές τιμές της X μακριά από τη μέση τιμή μ. Μάλιστα, μικρή διασπορά σημαίνει ότι οι τιμές της X που βρίσκονται «μακριά» από τη μ θα έχουν μικρή πιθανότητα, ενώ μεγάλη διασπορά σημαίνει το αντίθετο.

3) Η διασπορά (διακύμανση) μιας μεταβλητής εκφράζεται σε μονάδα που προφανώς είναι το τετράγωνο της μονάδας μέτρησης της μεταβλητής, πράγμα που συνήθως δυσχεραίνει τις απαραίτητες συγκρίσεις μεταξύ των διάφορων εμπλεκόμενων μεγεθών.
Αυτή την αδυναμία της διασποράς (σ^2), έρχεται να καλύψει η θετική τετραγωνική της ρίζα, δηλ. το μέγεθος που λέγεται τυπική απόκλιση (σ), που μετράται φυσικά στις ίδιες μονάδες με την αρχική μεταβλητή.

Παραδείγματα *(στη μέση τιμή και τη διασπορά μιας τ.μ.)*

1) Η κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X που περιγράφει το π.τ. της ανάριψης ενός ζαριού ως γνωστόν είναι, $f(x) = \frac{1}{6}$, για $x = 1,2,3,4,5,6$.

Τότε η μέση τιμή της διακριτής τ.μ. X, είναι:

$$E(X) = \sum_i x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{6} x_i f(x_i) = 1\tfrac{1}{6} + 2\tfrac{1}{6} + 3\tfrac{1}{6} + 4\tfrac{1}{6} + 5\tfrac{1}{6} + 6\tfrac{1}{6} = 3,5\,.$$

Σημείωση:
Προφανώς η μέση τιμή δεν συμπίπτει πάντοτε με μια από τις τιμές της τ.μ. X.

2) Η διάρκεια ζωής X (σε ώρες) μιας ηλεκτρονικής λυχνίας δίνεται από την κατανομή πιθανότητας, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{όταν } x > 0 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

Τότε η μέση διάρκεια ζωής της λυχνίας δίνεται από τη μέση τιμή της συνεχούς τ.μ. X, δηλ.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x(\lambda e^{-\lambda x})dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda x}dx = \lambda \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

3) Θεωρούμε ένα τυχερό παιχνίδι, όπου ρίχνουμε 3 ζάρια ταυτόχρονα και στοιχηματίζουμε την εμφάνιση «6-ριών», ως εξής:
αν φέρουμε 1 εξάρι, τότε κερδίζουμε 1 ευρώ,
αν φέρουμε 2 εξάρια, τότε κερδίζουμε 2 ευρώ,
αν φέρουμε 3 εξάρια, τότε κερδίζουμε 3 ευρώ,
ενώ αν δεν φέρουμε κανένα εξάρι τότε χάνουμε 1 ευρώ.
Αφού προσδιοριστεί η τ.μ. X που εκφράζει αυτό το τυχερό παιχνίδι (π.τ.), ακολούθως να υπολογιστούν οι ποσότητες: $E(X)$, $E(X^2)$, $\sigma^2(X)$, $\sigma(X)$, και τέλος να εξεταστεί αν το παιχνίδι είναι «δίκαιο».

Λύση

Καταρχήν, το παιχνίδι (π.τ.) αυτό «μαθηματικοποιείται» ως εξής:
Έστω X το ποσό που κερδίζουμε σε μια ρίψη των 3 ζαριών. Τότε το X είναι μια διακριτή τ.μ. που παίρνει τις τιμές {-1,1,2,3}, ενώ ο δειγματοχώρος του παιχνιδιού (π.τ.) είναι, $\Omega=\{x_1,x_2,x_3$/όπου τα x_1,x_2,x_3, παίρνουν τις τιμές $1,2,\ldots,6\}$.

Υποθέτοντας καταρχήν ότι τα ζάρια είναι «αμερόληπτα», η ρίψη των 3 ζαριών περιλαμβάνει ταυτόχρονα 3 ανεξάρτητες δοκιμές (η ένδειξη κάθε ζαριού είναι ανεξάρτητη των 2 άλλων) όπου η πιθανότητα εμφάνισης ενός εξαριού είναι $\frac{1}{6}$.

Συνεπώς η αντίστοιχη κατανομή πιθανότητας f(x)=P(X=x) δίνεται από τον πίνακα:

x	-1	1	2	3
f(x)=P(X=x)	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

(αφού, $P(X=-1)=\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$, $P(X=1)=\frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\frac{1}{6}\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6}=\frac{75}{216}$,

$P(X=2)=\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6}=\frac{15}{216}$, $P(X=3)=\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$).

Οπότε διαδοχικά βρίσκουμε:

$$E(X)=\sum_i x_i\, f(x_i)=(-1)\frac{125}{216}+1\frac{75}{216}+2\frac{15}{216}+3\frac{1}{216}=\frac{-17}{216}=-0{,}079\,.$$

$$E(X^2)=\sum_i (x_i)^2 f(x_i)=(-1)^2\frac{125}{216}+1^2\frac{75}{216}+2^2\frac{15}{216}+3^2\frac{1}{216}=\frac{269}{216}=1{,}245\,.$$

$$\sigma^2(X) = V(X) = \sum_i [x_i-E(X)]^2 f(x_i)=\sum_i [x_i-(\frac{-17}{216})]^2 f(x_i)=$$

$$= (-1+\frac{17}{216})^2\frac{125}{216}+(\frac{233}{216})^2\frac{75}{216}+(\frac{444}{216})^2\frac{15}{216}+(\frac{665}{216})^2\frac{1}{216} = 1,239.$$

και

$$\sigma(X) = +\sqrt{\sigma^2(X)} = \sqrt{1{,}239} = 1,113.$$

Τέλος, το παιχνίδι δεν είναι «δίκαιο» αφού μ=-0,079, δηλ. ο παίχτης θα πρέπει να περιμένει κατά μέσο όρο να χάνει. Για να ήταν δίκαιο το παιχνίδι, θα έπρεπε να ήταν μ=0.

4) Ένας διαιτολόγος συνιστά σε έναν υπέρβαρο να κάνει μια δίαιτα επί 2 εβδομάδες και ότι σ' αυτό το διάστημα θα χάσει 5-10 κιλά.
Έστω ότι η τ.μ. είναι X={ο αριθμός των κιλών που θα χάσει} και ότι η αντίστοιχη κατανομή πιθανότητας είναι,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 5<x<10\\ 0, & \text{αλλού.}\end{cases}$$

Να υπολογιστεί πόσο βάρος θα χάσει κατά μέσο όρο αυτός που κάνει αυτή τη δίαιτα και με τι απόκλιση.

Λύση
Το βάρος που θα χάσει, κατά μέσο όρο, είναι η μέση τιμή της συνεχούς τ.μ. X, δηλ. $\mu = E(X) = \int_5^{10} xf(x)dx = \int_5^{10} x\frac{1}{5}dx = \frac{1}{5}[\frac{x^2}{2}]_5^{10} = 7,5(\text{κιλά}).$

Για να βρούμε την απόκλιση σ(X), πρέπει να βρούμε πρώτα τη διασπορά, δηλ.

$$\sigma^2(X) = V(X) = \int_5^{10} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_5^{10} (x-7,5)^2 \frac{1}{5}dx = \frac{25}{12} = 2,083.$$

Οπότε, η ζητούμενη απόκλιση είναι:

$$\sigma(X) = +\sqrt{\sigma^2(X)} = +\sqrt{2,083} = 1,443(\text{κιλά}).$$

5) Ρίχνουμε 2 ζάρια ταυτόχρονα και συμβολίζουμε με Χ την τ.μ. που εκφράζει την απόλυτη τιμή της διαφοράς των ενδείξεων των πάνω όψεων των ζαριών.
Να βρεθούν:

α) Η κατανομή πιθανότητας f(x)=P(X=x) της τ.μ. Χ,
β) Η μέση τιμή E(X), η διασπορά V(X) και η απόκλιση σ(Χ).

Λύση

α) Έστω i η ένδειξη του πρώτου ζαριού και j η ένδειξη του δεύτερου ζαριού, όπου προφανώς i,j={1,2,…,6} και τα δυνατά αποτελέσματα είναι 36.

Από τη διακριτή τ.μ. Χ, έπεται ότι οι δυνατές τιμές της είναι, Χ={0,1,2,3,4,5}.

Δηλ. το ενδεχόμενο Χ=0, αντιστοιχεί στα ζεύγη:
{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)}, οπότε $P(X=0)=\frac{6}{36}$.

Το ενδεχόμενο Χ=1, αντιστοιχεί στα ζεύγη:
{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)} οπότε, $P(X=1)=\frac{10}{36}$.

Όμοια, βρίσκουμε: $P(X=2)=\frac{8}{36}$, $P(X=3)=\frac{6}{36}$, $P(X=4)=\frac{4}{36}$, $P(X=5)=\frac{2}{36}$.

(Ας σημειωθεί ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των ενδεχομένων είναι,

$P(X=0)+ P(X=1)+\ldots+ P(X=5)=\frac{6}{36}+\frac{10}{36}+\ldots+\frac{2}{36}=1$).

β) $E(X)=0\times\frac{6}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}=\frac{70}{36}\simeq1,94$,

$$E(X^2)=0^2\times\frac{6}{36}+1^2\times\frac{10}{36}+2^2\times\frac{8}{36}+3^2\times\frac{6}{36}+4^2\times\frac{4}{36}+5^2\times\frac{2}{36}=\frac{210}{36}\simeq5,83 ,$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{210}{36} - (\frac{70}{36})^2 = \frac{665}{324} \simeq 2,05$$

και

$$\sigma(X) = +\sqrt{V(X)} = \sqrt{2,05} \simeq 1,43 .$$

5) Έστω μια συνεχής τ.μ. X με κατανομή πυκνότητας πιθανότητας,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{όταν } 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ζητείται να βρεθούν:

α) $F(x)$, β) $P(1 \le X \le 1.5)$, γ) $E(X)$ και $E(X^2)$, δ) $V(X)$ και $\sigma(X)$.

Λύση

α) Η αθροιστική κατανομή πιθανότητας της συνεχούς τ.μ. X, για $0 \le x \le 2$, ως γνωστόν δίνεται από τον τύπο:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \tfrac{1}{2}tdt = 0 + \tfrac{1}{2}[\tfrac{t^2}{2}]_0^x = \tfrac{1}{4}x^2,$$

και συνεπώς

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2, & \text{όταν } 0 \le x \le 2 \\ 1, & \text{όταν } x > 2 \end{cases}$$

β) $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) \Rightarrow P(1 \le X \le 1.5) = F(1.5) - F(1) = \frac{1}{4}(1.5)^2 - \frac{1}{4}(1)^2 = \frac{5}{16} = 0.31$,

είτε ισοδύναμα

$$P(1 \le X \le 1.5) = \int_{1}^{1.5} \frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2}]_1^{1.5} = \frac{1}{4}[(1.5)^2 - (1)^2] = \frac{1}{4}[2.25 - 1] = \frac{5}{16} = 0.31,$$

γ) $E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_0^2 x(\tfrac{1}{2}x)dx = \tfrac{1}{2}\int_0^2 x^2dx = [\tfrac{x^3}{6}]_0^2 = \tfrac{4}{3}$,

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2f(x)dx = \int_0^2 x^2(\tfrac{1}{2}x)dx = \tfrac{1}{2}\int_0^2 x^3dx = [\tfrac{x^4}{8}]_0^2 = 2,$$

δ) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - (\tfrac{4}{3})^2 = \tfrac{18}{9} - \tfrac{16}{9} = \tfrac{2}{9}$,

και $\sigma(X) = +\sqrt{V(X)} = \sqrt{\tfrac{2}{9}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{2}$.

4. ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΟΙ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΤΟΥΣ

Θα εξετάσουμε σ' αυτή την ενότητα ορισμένες σημαντικές Τυχαίες Μεταβλητές με τις Κατανομές τους (βασικά πιθανοθεωρητικά μοντέλα), που χρησιμοποιούνται συνήθως στις Εφαρμογές της Πιθανοθεωρίας.

4.1. ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

1. Διωνυμική τ.μ.

Διωνυμικό π.τ. λέγεται ένα πείραμα τύχης με τις εξής ιδιότητες:
α) Έχει 2 μόνο δυνατά αποτελέσματα, που το ένα μπορεί να κληθεί «επιτυχία» (Ε) και το άλλο «αποτυχία» (Α).
β) Η πιθανότητα επιτυχίας $P(E)=p$, $(0<p<1)$ είναι ίδια για κάθε επανάληψη του π.τ., και ότι το π.τ. επαναλαμβάνεται ανεξάρτητα n φορές (n= σταθερός αριθμός).
Π.χ.
η ανάριψη ενός νομίσματος n=100 φορές, θεωρώντας το (Γ) επιτυχία και το (Κ) αποτυχία, είναι ένα διωνυμικό π.τ.,
επίσης η ρίψη ενός ζαριού, θεωρώντας ας πούμε την εμφάνιση του 1 επιτυχία και οποιοδήποτε άλλο αποτυχία.

Έστω λοιπόν ένα διωνυμικό π.τ. και έστω X ο αριθμός των επιτυχιών (Ε) στις n επαναλήψεις του π.τ., δηλ. X είναι μια τ.μ. με τιμές 0,1,2,…,n, που λέγεται διωνυμική τ.μ. Η αντίστοιχη κατανομή της λέγεται επίσης διωνυμική και συμβολίζεται $B(x/n,p)$, ενώ συνήθως για να παραστήσουμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή γράφουμε, $X:B(n,p)$.

Αποδεικνύεται ότι ***η κατανομή πιθανότητας* f(x) *της διωνυμικής τ.μ.* X:B(n,p)**, δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{f(x)=P(X=x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}}, \qquad \textbf{(1)}$$

όπου: n=επαναλήψεις π.τ., x={0,1,2,…,n}=επιτυχίες,
p=πιθανότητα επιτυχίας, q=1-p=πιθανότητα αποτυχίας.

Απόδειξη
Καταρχήν, η f μπορεί να είναι κατανομή πιθανότητας, αφού:

$$f(x)\geq 0,\ \forall x=0,1,\dots,n, \qquad \text{και}$$

$$\sum_{x=0}^{n} f(x)=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \overset{(\text{διώνυμο Νεύτωνα})}{=} (p+q)^2=1^n=1.$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την $f(x)=P(X=x)$.
Έστω (χάριν απλούστευσης) ότι οι x Επιτυχίες (Ε) εμφανίστηκαν στις x πρώτες επαναλήψεις του π.τ., οπότε στις (n-x) τελευταίες εμφανίστηκαν οι Αποτυχίες (Α).
Επειδή οι n επαναλήψεις του π.τ. είναι ανεξάρτητες έχουμε:

$$P(\underbrace{EE\ldots E}_{x\ \text{φορές}}\ \underbrace{AA\ldots A}_{(n-x)\ \text{φορές}})=\underbrace{P(E)P(E)\ldots P(E)}_{x\ \text{φορές}}\ \underbrace{P(A)P(A)\ldots P(A)}_{(n-x)\ \text{φορές}}=p^x q^{n-x}.$$

Δηλ. η πιθανότητα να έχουμε x Επιτυχίες και (n-x) Αποτυχίες είναι $p^x q^{n-x}$ και αυτό προφανώς ανεξάρτητα της τοποθέτησης των x Επιτυχιών.

Υπάρχουν όμως, σύμφωνα με τη Συνδυαστική Ανάλυση, $\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}$ δυνατοί συνδυασμοί, συνεπώς, $f(x)=P(X=x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$.

Παρατηρήσεις

1) Στην περίπτωση που είναι **n=1**, τότε μιλάμε για ***τ.μ.*** και ***Κατανομή του Bernoulli.***

2) Συνήθως στα πρακτικά προβλήματα που εκφράζονται από διωνυμική κατανομή, ενδιαφερόμαστε για αθροίσματα όρων παρά για ένα συγκεκριμένο όρο, δηλ. ενδιαφερόμαστε για την *Αθροιστική Κατανομή Πιθανότητας της Διωνυμικής τ.μ.* που δίνεται από τη σχέση:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ q, & 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases},$$

όπως:

P(να έχουμε το πολύ k επιτυχίες, σε n επαναλήψεις του π.τ.) $=P(X \le k) = F(k) =$

$$= B(0/n,p) + B(1/n,p) + ... + B(k/n,p) = \sum_{x=0}^{k} B(x/n,p) = \sum_{x=0}^{k} f(x) = \sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}.$$

Παραδείγματα *(στη Διωνυμική Κατανομή)*

1) Σε ένα διαγώνισμα με 10 θέματα, ο εξεταζόμενος πρέπει να απαντήσει σε κάθε θέμα με «σωστό-λάθος». Ποια είναι η πιθανότητα ν' απαντήσει κάποιος σωστά

α) σε 7 τουλάχιστον θέματα,

β) ακριβώς σε 7 θέματα.

Λύση

Εξετάζουμε καταρχήν αν πρόκειται για διωνυμικό π.τ., δηλ. αν ισχύουν οι συνθήκες της διωνυμικής κατανομής:

-Κάθε θέμα έχει 2 δυνατά αποτελέσματα, σωστό (Ε) και λάθος (Α).

-Η πιθανότητα επιτυχίας P(E) κάθε θέματος είναι ίδια, δηλ. $P(E)=p=\frac{1}{2}$, ενώ η απάντηση σε ένα θέμα δεν εξαρτάται από την απάντηση σε άλλο θέμα, και υπάρχουν n=10 θέματα για απάντηση.

Άρα, αυτό το π.τ. εκφράζεται από διωνυμική κατανομή.

Έτσι, αν X είναι ο αριθμός των σωστών απαντήσεων, τότε έχουμε:

α)

$$P(X \ge 7) = 1 - P(X < 7) = 1 - P(X \le 6) = 1 - \sum_{x=0}^{6} B(x/n=10, p=\tfrac{1}{2}) = 1 - \sum_{x=0}^{6} f(x) = 1 - \sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} =$$

$$(\text{όπου } n = 10,\ x = 0,1,\dots,6,\ p = \frac{1}{2},\ q = 1 - p = \frac{1}{2})$$

$$=1-\binom{10}{0}(\tfrac{1}{2})^0(\tfrac{1}{2})^{10}+\binom{10}{1}(\tfrac{1}{2})^1(\tfrac{1}{2})^9+\binom{10}{2}(\tfrac{1}{2})^2(\tfrac{1}{2})^8+\binom{10}{3}(\tfrac{1}{2})^3(\tfrac{1}{2})^7+...+\binom{10}{5}(\tfrac{1}{2})^5(\tfrac{1}{2})^5+\binom{10}{6}(\tfrac{1}{2})^6(\tfrac{1}{2})^4=$$

$$=...\simeq 1-0{,}82812=0{,}17188.$$

(Για την αποφυγή όλων αυτών των αριθμητικών υπολογισμών συνήθως χρησιμοποιούμε τους τυποποιημένους *αθροιστικούς διωνυμικούς πίνακες*, όπως εδώ για n=10, k=6, p=0,5, οπότε βρίσκουμε 0,82812).

β) $P(X=7)=P(X<7)-P(X<6)=(\text{μέσω των αθρ. διων. πινάκων})\simeq 0,94531-0,82812=0,11719$,

(είτε απευθείας,

$$P(X=7)=f(7)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\binom{10}{7}(0,5)^7(0,5)^3=\frac{10!}{7!3!}(0,5)^{10}=\frac{3628800}{5040(6)}(0,0009766)\simeq 0,11719,$$

είτε κάνοντας χρήση των *απλών διωνυμικών πινάκων*).

2) Εκτιμάται ότι 25% από όσους εξετάζονται για την απόκτηση διπλώματος οδηγού αυτοκινήτου αποτυχαίνουν.
Αν εξεταστούν 25 υποψήφιοι, να υπολογιστούν οι πιθανότητες:
a) $P(X\geq 1)$, b) $P(X\leq 20)$, c) $P(5\leq X\leq 20)$, όπου X είναι ο αριθμός των αποτυχόντων.

Λύση

Καταρχήν εξετάζουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις της διωνυμικής κατανομής:
-Κάθε υποψήφιος, πετυχαίνει (Ε) ή αποτυχαίνει (Α),
-Θεωρούμε ότι P(A)=p=0,25, ότι η αποτυχία ενός δεν εξαρτάται από την επιτυχία ενός άλλου υποψήφιου και ο αριθμός των υποψήφιων είναι n=25.

Άρα, πρόκειται για διωνυμική κατανομή, με n=25, p=0,25, q=0,75, οπότε:

a) $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-f(0)=1-\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=1-\binom{25}{0}(0,25)^0(0,75)^{25-0}=$

$$=1-\frac{25!}{(25-0)!0!}(0,75)^{25}=1-(0,75)^{25}\simeq 1-0,0008=0,9992.$$

b) $P(X\leq 20)=\sum_{x=0}^{20}\binom{25}{x}(0,25)^x(0,75)^{25-x}=\ldots\simeq 1.$

c) $P(5\leq X\leq 20)=P(X\leq 20)-P(X\leq 4)=\ldots=1-0,2137=0,7863.$

3) Θεωρώντας ότι η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι είναι από 50%, να βρεθούν οι πιθανότητες ώστε σε μια οικογένεια με 5 παιδιά,
α) Να υπάρχει τουλάχιστον 1 αγόρι,
β) Να έχει ακριβώς 2 αγόρια,
γ) Να είναι όλα αγόρια, δεδομένου ότι γνωρίζουμε ήδη πως το 1^{o} παιδί είναι αγόρι.

Λύση

Πρόκειται (όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε) για διωνυμικό π.τ., οπότε αν X είναι η αντίστοιχη διωνυμική τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό των αγοριών της οικογένειας, δηλαδή X:B(x/n=5,p=0,5), έχουμε:

α) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0) = 1 - \binom{n}{x} p^x q^{n-x} =$

$= 1 - \binom{5}{0} (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^{5-0} = 1 - (\frac{1}{2})^5 = 0,969.$

β) $P(X = 2) = f(2) = \binom{5}{2} (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^{5-2} = \binom{5}{2} (\frac{1}{2})^5 = 0,311.$

γ) Θεωρώντας τα ενδεχόμενα, Α={όλα είναι αγόρια}, Β={το 1^o είναι αγόρι}, έχουμε:
$P(A) = \frac{1}{2^5}$, $P(B) = \frac{1}{2}$,

ενώ η δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου Α δοθέντος του ενδεχομένου Β είναι,

$$P(A / B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2^5}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

4) Κυνηγός σκοπεύει ένα στόχο και εκτιμάται ότι έχει πιθανότητα επιτυχίας 0,4. Πόσες φορές πρέπει να πυροβολήσει, ώστε η πιθανότητα να πετύχει τουλάχιστον μια φορά το στόχο να είναι μεγαλύτερη από 90%.

Λύση

Αν Χ είναι ο αριθμός των επιτυχών βολών κατά του στόχου, τότε πρόκειται για διωνυμική κατανομή Χ:Β(x/n,p=0,4).

Οπότε:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0) = 1 - B(x = 0 / n, (0,4)) = 1 - \binom{n}{x} p^x q^{n-x} =$$

$$= 1 - \binom{n}{0} (0,4)^0 (0,6)^{n-0} = 1 - (0,6)^n.$$

Εξ υποθέσεως όμως έχουμε:

$$1 - (0,6)^n \Leftrightarrow 0,1 = (0,6)^n \Leftrightarrow \ln(0,1) = \ln(0,6)^n \Leftrightarrow \ln(0,1) = n \ln(0,6) \Leftrightarrow n = \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,6)} = \frac{-2,30}{-,51} \approx 4,5 .$$

Επομένως $n \geq 5$, δηλ. πρέπει να πυροβολήσει 5 φορές τουλάχιστον.

5) Στρίβουμε ένα νόμισμα 6 φορές θεωρώντας ότι επιτυχία είναι το Κ (Κεφαλή). Να υπολογιστεί η πιθανότητα:

i) Να έχουμε 2 ακριβώς επιτυχίες,

ii) Να έχουμε τουλάχιστον 4 επιτυχίες,

iii) Να μην έχουμε καμιά επιτυχία.

Λύση

i) Είναι, $B(x / n, p) = B(x = 2 / n = 6, p = \frac{1}{2}) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{6}{2} (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^{6-2} = \frac{15}{64} \approx 0,23.$

ii) $P(X \geq 4) = B(x = 4 / n = 6, p = \frac{1}{2}) + B(5 / 6, \frac{1}{2}) + B(6 / 6, \frac{1}{2}) = ... = \frac{11}{32} \approx 0,34.$

iii) $P(X = 0) = B(x = 0 / n = 6, p = \frac{1}{2}) = \binom{6}{0} (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^{6-0} = (\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64} \approx 0,015.$

6) Ένα προϊόν διακινείται στην αγορά με πιθανότητα 20% να είναι ελαττωματικό. Αγοράζοντας 4 από τα προϊόντα αυτά, ποια είναι η πιθανότητα να μας τύχει,
i) Ένα ελαττωματικό,
ii) Κανένα ελαττωματικό,
iii) Το πολύ 2 ελαττωματικά.

Λύση

i) $P(1-\text{ελαττωματικό}) = P(X=1) = B(x=1/n=4, p=0,2) = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}(0,2)^1(0,8)^3 \approx 0,4096.$

ii) $P(0-\text{ελαττωματικά}) = P(X=0) = B(x=0/n=4, p=0,2) = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}(0,2)^0(0,8)^4 \approx 0,4096.$

iii) $P(2 \text{ το πολύ ελαττωματικά}) = P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \approx$
$\approx 0,4096 + 0,4096 + 0,1536 = 0,9278.$

7) Ποια είναι η πιθανότητα μια οικογένεια με 5 παιδιά να έχει 3 κορίτσια (θεωρώντας ότι αγόρι-κορίτσι γεννιούνται με την ίδια πιθανότητα 50%).

Λύση

Είναι προφανώς και εδώ, διωνυμική τ.μ. X και κατανομή πιθανότητας f(x), οπότε:
$$B(x/n,p) = \begin{pmatrix}n\\x\end{pmatrix}p^x q^{n-x} = B(x=3/n=5, p=\tfrac{1}{2}) = P(X=3) = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}(\tfrac{1}{2})^3(\tfrac{1}{2})^{5-3} \approx 0,3125.$$

8) Ρίχνουμε ένα ζάρι 20 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί το 6, πέντε φορές;

Λύση

Έστω X ο αριθμός των εμφανίσεων του 6, στις 20 ρίψεις του ζαριού, με πιθανότητα επιτυχίας κάθε φορά $p = \frac{1}{6}$.

Άρα πρόκειται για διωνυμική τ.μ., οπότε:
$$B(x/n,p) = \begin{pmatrix}n\\x\end{pmatrix}p^x q^{n-x} = B(x=5/n=20, p=\tfrac{1}{6}) = P(X=5) = \begin{pmatrix}20\\5\end{pmatrix}(\tfrac{1}{6})^5(\tfrac{5}{6})^{20-5} = \ldots \approx 0,14.$$

9) Από μια ομάδα 10 ατόμων, ποια είναι η πιθανότητα 2 άτομα ακριβώς να έχουν γεννηθεί την 1η Ιανουαρίου;

Λύση

Είναι, $B(x=2/n=10, p=\frac{1}{365}) = \begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}(\frac{1}{365})^2(\frac{364}{365})^{10-2} = \ldots \approx 0,00264.$

2. Κατανομή και τ.μ. Poisson

Η τ.μ. και η κατανομή πιθανότητας Poisson εκφράζει πειράματα τύχης με τα εξής χαρακτηριστικά:

α) Ενδεχόμενα (ή επιτυχίες) που συμβαίνουν σε ένα χρονικό διάστημα, είναι ανεξάρτητα από εκείνα που συμβαίνουν σε κάθε άλλο χρονικό διάστημα (που δεν υπερκαλύπτει το προηγούμενο χρονικό διάστημα).
β) Για μικρό χρονικό διάστημα, η πιθανότητα επιτυχίας είναι ανάλογη του εύρους του χρονικού διαστήματος.
γ) Η πιθανότητα να συμβούν 2 ή περισσότερες επιτυχίες σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα είναι μηδενική.

Π.χ.
i) Ο αριθμός των τηλεφωνικών κλήσεων που φτάνουν σε ένα τηλεφωνικό κέντρο, μέσα σε ένα χρονικό διάστημα t που παίρνει τιμές 0,1,2,…,M, (όπου M ο μέγιστος αριθμός κλήσεων που μπορεί να διεκπεραιώσει το τηλεφωνικό κέντρο στο χρόνο t), είναι μια τ.μ. X που εκφράζεται από την κατανομή πιθανότητας Poisson,
ii) Ο αριθμός X των σωματιδίων που εκπέμπονται από μια ραδιενεργό πηγή σε ορισμένο χρονικό διάστημα t που παίρνει τιμές 0,1,2,…,
iii) Ο αριθμός των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε κάθε Σαββατοκύριακο στη χώρα μας, είναι μια τ.μ. που παίρνει φυσικές τιμές 0,1,2,…,
iv) Ο αριθμός X των αρρώστων που εισάγονται καθημερινά στα νοσοκομεία από τα κέντρα άμεσης βοήθειας, είναι μια τ.μ. που παίρνει φυσικές τιμές 0,1,2,…,
v) Ο αριθμός X των πελατών ενός super-market που πληρώνουν στα ταμεία σε ορισμένο χρονικό διάστημα t,
vi) Ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών ανά σελίδα,
vii) Ο αριθμός X των αεροπλάνων (ή πλοίων) που φτάνουν καθημερινά σε ένα αεροδρόμιο (ή λιμάνι), κτλ.

Σε τέτοια πειράματα τύχης, η τ.μ. X ακολουθεί με ικανοποιητική προσέγγιση την ***κατανομή πιθανότητας του Poisson***, που έχει ως εξής:

$$\boxed{f(x)=P(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},\quad (\lambda>0,\ x=0,1,2,...)}, \qquad \textbf{(2)}$$

(όπου X εκφράζει τον αριθμό των ενδεχομένων που συμβαίνουν σε ένα χρονικό διάστημα, και η ποσότητα λ λέγεται *παράμετρος* της κατανομής Poisson).

Η κατανομή Poisson συμβολίζεται συνήθως P(λ) ή P(x,λ).

Παρατηρήσεις

1) Ο τύπος (2) είναι πράγματι κατανομή πιθανότητας (διακριτής τ.μ.), αφού ισχύει:

$$f(x)\geq 0,\ \text{για κάθε}\ x=0,1,2,...,\quad \text{και}\quad \sum_{x=0}^{\infty} f(x)=\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}}_{\text{σειρά Maclaurin}}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1.$$

2) (Προσέγγιση διωνυμικής κατανομής από κατανομή Poisson):
Η κατανομή Poisson προσεγγίζει τη διωνυμική κατανομή, όταν το n είναι πολύ μεγάλο και η πιθανότητα p είναι πολύ μικρή, δηλ. $n\to\infty$ και $p\to 0$, έτσι ώστε, $np\to\lambda$, οπότε γράφουμε: $\sum_{x=0}^{k} B(x/n,p) = \sum_{x=0}^{k} P(x,np)$.

3) Αθροίσματα της μορφής, $F(k) = P(X \le k) = \sum_{x=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, δίνονται και από τους τυποποιημένους πίνακες του Poisson, που χρησιμοποιούνται και αντίστροφα, δηλ. αν ξέρουμε την τιμή της F(k) μπορούμε να βρούμε το k.

Παραδείγματα *(στη Κατανομή Poisson)*

1) Έστω X ο αριθμός των κολοβακτηριδίων που περιέχονται σε ένα λίτρο πόσιμου νερού. Αν λ=10, να υπολογιστούν οι πιθανότητες: $P(X<15)$, $P(X>20)$.

Λύση

Δεδομένου ότι ένα τέτοιο πείραμα τύχης ακολουθεί την κατανομή Poisson, με παράμετρο λ=10, από τον τύπο (2) βρίσκουμε:

$$P(X<15)=P(X\le 14)=\sum_{x=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=\sum_{x=0}^{14} e^{-10}\frac{10^x}{x!}=e^{-10}\frac{10^0}{0!}+e^{-10}\frac{10^1}{1!}+...+e^{-10}\frac{10^{14}}{14!}=...=0{,}91654.$$

(Προφανώς λόγω των πολλών αριθμητικών υπολογισμών ενδείκνυται η χρήση των τυποποιημένων πινάκων Poisson).

Όμοια, βρίσκουμε:

$$P(X>20)=1-P(X\le 19)=1-\sum_{x=0}^{k=19} e^{-10}\frac{10^x}{x!}=1-0{,}99655=0{,}00345.$$

2) Μια δακτυλογράφος κάνει ένα λάθος ανά σελίδα. Θεωρώντας ότι ο αριθμός των λαθών ανά σελίδα ακολουθεί την κατανομή Poisson, ποια είναι η πιθανότητα να υπάρξει μια σελίδα με περισσότερα από 5 λάθη, στη συνολική της εργασία;

Λύση

Θεωρώντας ότι τα λάθη που κάνει η δακτυλογράφος σε μια σελίδα είναι ανεξάρτητα από τα λάθη που κάνει σε μια άλλη σελίδα, και ότι X είναι ο αριθμός των λαθών ανά σελίδα,
τότε κατά την κατανομή Poisson για λ=1, έχουμε:

$$P(X\ge 5)=\sum_{x=5}^{\infty} e^{-1}\frac{1^x}{x!}=1-P(X<5)=1-P(X\le 4)=1-\sum_{x=0}^{k=4} e^{-1}\frac{1^x}{x!}=1-0{,}99634=0{,}00366.$$

3) Μια ασφαλιστική εταιρεία που κάνει ασφάλειες ζωής, έχει υπολογίσει ότι ένας ασφαλισμένος ηλικίας 40-50 χρονών έχει πιθανότητα 0,00001 να πεθάνει σε διάστημα ενός χρόνου. Αν η εταιρεία έχει 100.000 τέτοιους ασφαλισμένους, ποια είναι η πιθανότητα να πληρώσει ασφάλιστρα σε 5 τουλάχιστον ασφαλισμένους λόγω θανάτου τους μέσα σε ένα χρόνο;

Λύση

Έστω X ο αριθμός των θανάτων των ασφαλισμένων ηλικίας 40-50 χρονών μέσα σε ένα χρόνο.
Παρατηρούμε σχετικά ότι:

α) Ένας ασφαλισμένος πεθαίνει ή δεν πεθαίνει (έχουμε 2 αντίθετες καταστάσεις).

β) Ο θάνατος ενός ασφαλισμένου δεν εξαρτάται από τον θάνατο ενός άλλου, ότι η πιθανότητα θανάτου είναι p=0,00001 και ότι ο αριθμός των ασφαλισμένων είναι (σταθερός) 100.000.

Άρα, ισχύουν οι συνθήκες της διωνυμικής τ.μ.,
οπότε:

$$P(X \geq 5) = \sum_{x=5}^{100.000} B(x/n=100.000, p=0{,}00001) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{x=0}^{4} B(x/100.000,\ 0{,}00001)\ ,$$

που βέβαια (για τέτοιες μεγάλες τιμές) δεν δίνεται από τους τυποποιημένους διωνυμικούς πίνακες.

Όμως, για λ=np=(100.000)(0,00001)=1, χρησιμοποιούμε την προσέγγιση (2α) της διωνυμικής κατανομής από την κατανομή Poisson, δηλ.

$$\sum_{x=0}^{4} B(x/100.000,\ 0{,}00001) \approx \sum_{x=0}^{4} P(x,\ \lambda=1) = \sum_{x=0}^{4} e^{-1}\frac{1^x}{x!} = e^{-1}\frac{1^0}{0!} + e^{-1}\frac{1^1}{1!} + e^{-1}\frac{1^2}{2!} + e^{-1}\frac{1^3}{3!} + e^{-1}\frac{1^4}{4!} = 0{,}99634\ .$$

Οπότε,

$$P(X \geq 5) \approx 1 - \sum_{x=0}^{4} P(x,\ \lambda=1) = 1 - 0{,}99634 = 0{,}00366\ .$$

4.2. Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

1. Κανονική τ.μ.-Κατανομή (ή Κατανομή του Gauss)

Η πιο σημαντική από όλες τις τ.μ.-κατανομές είναι μάλλον η Κανονική Κατανομή ή Κατανομή του Gauss. Η μεγάλη σπουδαιότητά της οφείλεται κυρίως:
α) Γιατί προσεγγίζει την κατανομή πολλών ποσοτήτων των πρακτικών εφαρμογών, όπως πληθυσμιακά χαρακτηριστικά και *τυχαία σφάλματα* που εμφανίζονται σε διάφορες μετρήσεις, π.χ. μετρήσεις ύψους, βάρους, μήκους, όγκου, δείκτη ευφυΐας (IQ), βαθμολογίες σπουδαστών (διαγωνίσματα), αρτηριακής πίεσης ανθρώπων ορισμένης ηλικίας, αγροτική παραγωγή προϊόντων ανά στρέμμα, αποτελέσματα ψυχολογικών τεστ, κτλ,
β) Γιατί αποτελεί θεωρητικά το όριο πολλών άλλων κατανομών (διακριτών και συνεχών), οι οποίες αν και είναι σημαντικές για τις πρακτικές εφαρμογές, εντούτοις είναι δύσκολο ή και αδύνατο ακόμα από μαθηματικής πλευράς να χρησιμοποιηθούν (πράγμα που αποτελεί και το περιεχόμενο του περίφημου «Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος»). Έτσι, το άθροισμα και η μέση τιμή μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων ακολουθεί προσεγγιστικά την κανονική κατανομή, ανεξάρτητα από το ποια κατανομή ακολουθούν οι αρχικές παρατηρήσεις.

Μια τ.μ. X λέγεται *Κανονική τ.μ. (ή του Gauss)* όταν η Κατανομή πιθανοτήτων f(x) δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad x\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{R},\ \sigma>0)} \qquad \textbf{(3)}$$

Η κανονική κατανομή-*normal distribution* (που μετονομάστηκε έτσι από τον Karl Pearson, από *κατανομή τυχαίων σφαλμάτων* που λεγόταν πριν) συμβολίζεται $N(\mu,\sigma^2)$ και οι ποσότητες μ=(μέση τιμή), σ^2=(διασπορά), λέγονται *παράμετροι* της κανονικής κατανομής.
Ειδικά, αν μ=0 και σ=1, τότε η αντίστοιχη τ.μ. και κατανομή, λέγεται ***τυπική ή τυποποιημένη** (standard) **κανονική κατανομή*** και συμβολίζεται X:N(0,1).

Παρατηρήσεις

1) Το ότι η f(x) της (3) είναι πράγματι μια *συνάρτηση κατανομής πιθανότητας*, προκύπτει από το ότι ισχύουν: $f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, και

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$, που αποδεικνύεται δείχνοντας ισοδύναμα ότι, $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right)^2=1$.

2) Η *αθροιστική συνάρτηση πιθανοτήτων* F της κανονικής κατανομής, βρίσκεται ότι είναι:

$$\boxed{F(x)=P(X\leq x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt,\quad x\in\mathbb{R}} \qquad \textbf{(3α)}$$

ενώ η *αθροιστική συνάρτηση πιθανοτήτων* Φ της *τυπικής κανονικής* N(0,1) είναι:

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, \qquad x \in \mathbb{R}} \qquad \textbf{(3β)}$$

Η ιδιαίτερη χρησιμότητα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής οφείλεται στην πινακοποίηση της κατανομής της, αφού για ορισμένες θετικές τιμές του x δίνονται οι αντίστοιχες τιμές Φ(x) της N(0,1) από έτοιμους πίνακες (συνήθως από x=0 μέχρι 3, ανά 0.01), ενώ για τις αντίθετες τιμές του x (από 0 μέχρι -3), ισχύει:

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)} \qquad \textbf{(3γ)}$$

3) Αν η τ.μ. X είναι $N(\mu,\sigma^2)$, τότε η τ.μ. $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ είναι N(0,1).

Έτσι, η αθροιστική κατανομή F μιας κανονικής $N(\mu, \sigma^2)$ βρίσκεται από την αντίστοιχη αθροιστική κατανομή Φ της τυπικής κατανομής N(0,1) με αλλαγή μεταβλητής, δηλ.

$$F(x)=P(X \le x) = P(\mu + \sigma Y \le x) = P(Y \le \frac{x-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}), \qquad \textbf{(3δ)}$$

4) Αν X: $N(\mu, \sigma^2)$, τότε αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$F(x)=P(X \le \beta) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} = Y \le \frac{\beta-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{\beta-\mu}{\sigma}), \qquad \textbf{(3ε)}$$

$$\boxed{P(\alpha \le X \le \beta) = P(\frac{\alpha-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\beta-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{\beta-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha-\mu}{\sigma})}, \qquad \textbf{(3ζ)}$$

και $$P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2} dt, \qquad \textbf{(3η)}$$

5) Η γραφική παράσταση της κανονικής κατανομής πιθανότητας f(x) έχει «καμπανοειδή» μορφή, και είναι συμμετρική καμπύλη περί το μ (ως προς την ευθεία x=μ) δηλ. ισχύει,

$$f(\mu+x)=f(\mu-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \textbf{(3θ)}$$

(βλ. επόμενο σχήμα).

Αξιοσημείωτα σχετικά με το γράφημα της f(x) είναι τα εξής:

α) Αν μ=σταθερό και ελαττώνεται το σ, η μορφή της f γίνεται οξύτερη και δίνει μεγαλύτερες τιμές πιθανοτήτων.

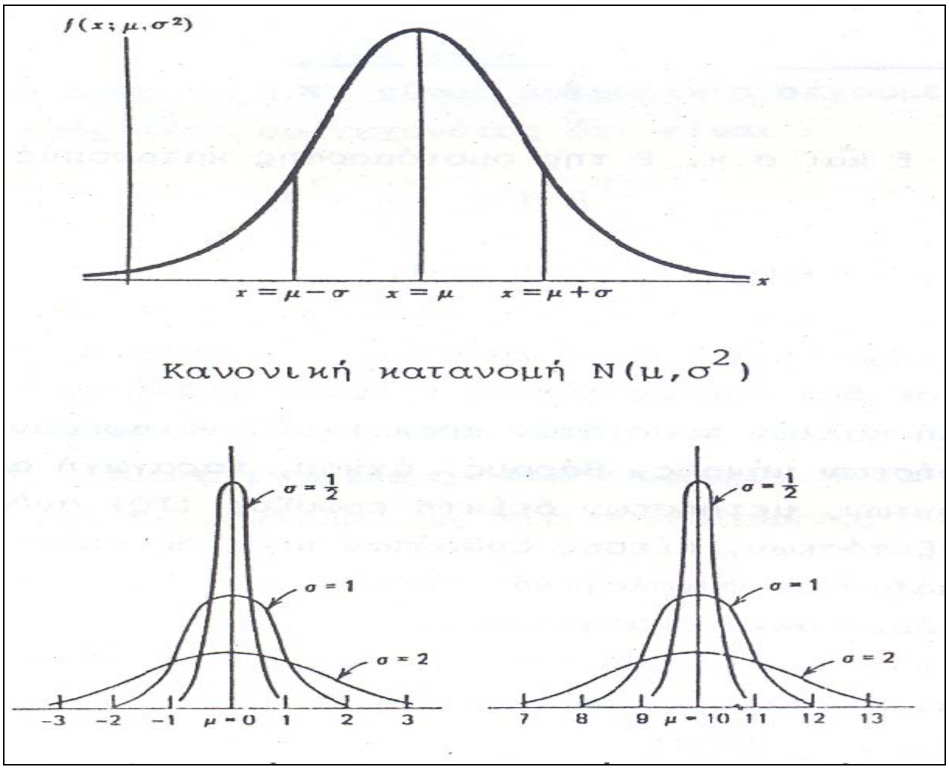
β) Αν σ=σταθερό και μ μεταβάλλεται, τότε η μορφή της f παραμένει σταθερή με το μέσο της πάντα στην ίδια θέση μ.

γ) Ένας μεγάλος αριθμός από τις τιμές μιας τ.μ. X που ακολουθεί κανονική κατανομή, βρίσκεται ότι έχει όρια:

γ_1) Περίπου 68% των τιμών της τ.μ. X βρίσκονται στο διάστημα (μ-σ,μ+σ), δηλ.

$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) \approx 68\%$, γ$_2$) Περίπου 95,5% των τιμών της τ.μ. X βρίσκονται στο διάστημα (μ-2σ,μ+2σ), δηλ. $P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) \approx 95,5\%$,

γ$_3$) Περίπου 99,7% των τιμών της τ.μ. X βρίσκονται στο διάστημα (μ-3σ,μ+3σ), δηλ. $P(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) \approx 99,7\%$.



Παραδείγματα *(στην Κανονική Κατανομή)*

1) Έστω μια βιομηχανία που παράγει ηλεκτρονικά εξαρτήματα και ότι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά αυτών των εξαρτημάτων είναι να έχουν διάμετρο 1cm. Έστω επίσης, ότι η αν η διάμετρος υπερβαίνει τα όρια $1 \pm 0,05$ cm, τότε τα ηλεκτρονικά εξαρτήματα δεν είναι χρησιμοποιήσιμα.

Θεωρώντας ότι η τ.μ. X των παραγόμενων εξαρτημάτων ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ=0,98cm και σ=0,02cm, να βρεθεί το ποσοστό των χρησιμοποιήσιμων ηλεκτρονικών εξαρτημάτων.

Λύση

$$P(1-0,05 \le X \le 1+0,05) = P(0,95 \le X \le 1,05) =$$

$$=P(\alpha \le X \le \beta) = P(\frac{\alpha-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\beta-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{\beta-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}) =$$

$$=P(\frac{0,95-0,98}{0,02} \le \frac{X-0,98}{0,02} \le \frac{1,05-0,98}{0,02}) = \Phi(3,5) - \Phi(-1,5) = \Phi(3,5) - [1-\Phi(1,5)] =$$

$$= \Phi(3,5) + \Phi(1,5) - 1 = 0,999767 + 0,993193 - 1 = 0,99269.$$

2) Η τ.μ. Χ είναι N(5,16). Να υπολογιστούν: α) P(X>6) και β) P(3<X<6).

Λύση

Από τη σχέση (3ζ), για α=6, μ=5 και σ=4, έχουμε:

α) $P(\alpha < X) = P(\frac{\alpha-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma}) \Leftrightarrow P(6 < X) = P(\frac{6-5}{4} < \frac{X-5}{4}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(6 < X) = P(\frac{X-5}{4} > \frac{1}{4}) = 1 - P(\frac{X-5}{4} \le \frac{1}{4}) = 1 - \Phi(\frac{1}{4}) = 1 - \Phi(0.25) =$

(βλ. πίνακες τυποποιημένης κανονικής κατανομής)

$= 1 - 0.5987 = 0.4013.$

β) Από τη σχέση (3ζ), για α=3, β=6, μ=5 και σ=4, επίσης έχουμε:

$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi(\frac{\beta-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}) \Leftrightarrow$

$P(3 < X < 6) = \Phi(\frac{6-5}{4}) - \Phi(\frac{3-5}{4}) = \Phi(0.25) - \Phi(-0.5) = \Phi(0.25) - [1 - \Phi(0.5)] =$

$\Phi(0.25) + \Phi(0.5) - 1 = 0.5987 + 0.6915 - 1 = 0.2902.$

3) Έστω ότι ο δείκτης ευφυΐας (IQ) των ενήλικων μιας περιοχής ακολουθεί την κανονική κατανομή με μ=100 και σ=10.
α) Να βρεθεί η πιθανότητα, ο δείκτης ευφυΐας να είναι μεταξύ 90 και 120.
β) Αν αυτοί που έχουνIQπάνω από 130 χαρακτηρίζονται ως «μεγαλοφυΐες», ποιό είναι το ποσοστό των κατοίκων αυτής της κατηγορίας;

Λύση

Έστω η τ.μ. Χ=(IQ), με X:N(μ=100, σ^2=100), οπότε:

α) Όμοια από τη σχέση (3ζ) έχουμε:

$P(\alpha \le X \le \beta) = P(\frac{\alpha-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\beta-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{\beta-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}) \Leftrightarrow$

$P(90 < X < 120) = P(\frac{90-100}{10} < \frac{X-100}{10} < \frac{120-100}{10}) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - [1 - \Phi(1)] =$

$= \Phi(2) + \Phi(1) - 1 = 0,9773 + 0,8413 - 1 = 0,8186.$

β) Από τη σχέση (3ε), $F(x) = P(X \le \beta) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\beta-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{\beta-\mu}{\sigma})$, έχουμε:

$P(130 < X) = 1 - P(X \le 130) = 1 - P(\frac{X-100}{10} \le \frac{130-100}{10}) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0.99865 = 0.00135.$

Άρα 81,86% έχουν IQ μεταξύ 90 και 120, ενώ 0,135% μπορούν να χαρακτηριστούν ως «μεγαλοφυΐες».

4) Μια βιομηχανία παράγει κονσέρβες ψαριών, με μέσο βάρος 340 γραμμάρια και με απόκλιση 6 γραμμάρια. Θεωρώντας ότι το βάρος των κονσερβών ακολουθεί την κανονική κατανομή, να υπολογιστεί:

α) Ποια είναι η πιθανότητα μια οποιασδήποτε κονσέρβα να έχει βάρος μεταξύ 334 και 346 γραμμάρια;
β) Σε μια παραγωγή 10.000 κονσερβών, πόσες κονσέρβες έχουν βάρος λιγότερο από 330 γραμμάρια;

Λύση
Έστω X η τ.μ. που ισούται με το βάρος σε γραμμάρια μιας τυχαίας κονσέρβας, η οποία είναι, X:N(μ=340,σ=6).

Οπότε:

α) Από τη σχέση (3ζ),έχουμε:

$$P(334 \le X \le 346) = P(\frac{334-346}{6} \le \frac{X-340}{6} = Y \le \frac{346-340}{6}) = P(-1 \le Y \le 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) =$$

$$= \Phi(1) - [1-\Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6826.$$

β) Από τη σχέση (3ε), $F(x)=P(X \le \beta) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\beta-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{\beta-\mu}{\sigma})$,
έχουμε:

$$P(X < 330) = P(\frac{X-340}{6} = Y < \frac{330-340}{6}) = P(Y < -1.67) = \Phi(-1.67) = 1 - \Phi(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475.$$

Τέλος μετατρέποντας την πιθανότητα σε συχνότητα, βρίσκουμε ότι 475 κονσέρβες θα έχουν βάρος λιγότερο από 330 γραμμάρια σε σύνολο 10.000 κονσερβών.

Παρατήρηση *(Προσέγγιση της Διωνυμικής κατανομής από την Κανονική κατανομή):*

Αν X είναι μια τ.μ. που ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή B(n,p), τότε για n αρκετά μεγάλο και p όχι πολύ κοντά στο 0 και 1, η X ακολουθεί προσεγγιστικά την Κανονική κατανομή X:N(μ=np, σ=$\sqrt{npq}$). Στην πράξη χρησιμοποιούμε αυτή την προσέγγιση συνήθως όταν $n \ge 30$, $np \ge 5$ και $nq \ge 5$.

Σ' αυτή την ιδιότητα, της προσέγγισης δηλ. άλλων κατανομών (διακριτών ή συνεχών), έγκειται κυρίως και η σημαντικότητα της Κανονικής κατανομής. Επιπλέον σχετικά με την ιστορική της διαδρομή, ας σημειωθεί ότι, ο πρώτος που χρησιμοποίησε την Κανονική κατανομή ήταν ο Γάλλος Μαθηματικός *Abraham de Moivre το 1733* προκειμένου να προσεγγίσει πιθανότητες σχετικά με την ανάρριψη ενός νομίσματος. Ακολούθησε ο Γερμανός Μαθηματικός *Karl Friedrich Gauss (1777-1855)* που τη χρησιμοποίησε για τις αστρονομικές του μελέτες, γι' αυτό και η Κανονική κατανομή λέγεται και *Γκαουσιανή (Gaussian distribution).*

5) Ένα κέρμα «στρίβεται» 12 φορές. Να βρεθεί η πιθανότητα p να εμφανιστούν από 4 μέχρι 7 K (Κεφαλές), με χρήση της κανονικής κατανομής.

Λύση

Αυτό το π.τ. εκφράζεται από διωνυμική κατανομή B(n,p), με n=12 και p=q=1/2.

Όμως με χρήση της κανονικής κατανομής έχουμε,

$$\mu=np=12\left(\tfrac{1}{2}\right)=6 \text{ και } \sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{12\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)}=1,73\,.$$

Έστω X ο αριθμός των Κεφαλών, ενώ ζητείται η πιθανότητα $P(4 \le X \le 7)$.

Για να εφαρμοστεί η κανονική κατανομή (κατά προσέγγιση), υποθέτουμε ότι η X είναι συνεχής τ.μ. και ότι πρέπει να βρούμε την $p = P(3.5 \le X \le 7.5)$.

Την κανονική τ.μ. X αντικαθιστούμε κατόπιν με την τυποποιημένη κανονική τ.μ., $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-6}{1.73}$, για να μπορούμε να κάνουμε χρήση των πινάκων της τυποποιημένης κανονικής κατανομής,

οπότε:

$$p = P(3.5 \le X \le 7.5) = P\left(\frac{3.5-6}{1.73} \le \left(Y = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-6}{1.73}\right) \le \frac{7.5-6}{1.73}\right) = P(-1.45 \le X \le 0.87) =$$

$$= 0.4265 + 0.3078 = 0.7343.$$

Υπολογίζοντας την p μέσω της διωνυμικής κατανομής βρίσκουμε p=0.7332, που συγκρίνοντάς την με την ευρεθείσα p=0.7343, βλέπουμε ότι η προσέγγιση της διωνυμικής από την κανονική κατανομή είναι πολύ ικανοποιητική.

Με αυτό το παράδειγμα γίνεται φανερό ότι η κανονική κατανομή είναι η πιο σημαντική, γιατί αποτελεί θεωρητικά (αλλά και πρακτικά) το όριο πολλών άλλων κατανομών.

2. Ομοιόμορφη (ή Ορθογώνια) Κατανομή στο διάστημα [α,β]

Ονομάζουμε *Ομοιόμορφη (Uniform) ή ορθογώνια τ.μ.* X στο διάστημα [α,β] και τη συμβολίζουμε U(α,β), αυτή που έχει κατανομή πυκνότητας πιθανότητας,

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha}, & \text{όταν } x\in[\alpha,\beta],\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha<\beta\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}} \qquad \textbf{(4)}$$

Παρατηρήσεις

1) Η f(x) είναι μια Κατανομή Πιθανότητας, αφού:

$$f(x)\geq 0,\ \ \forall x\in\mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} dx=\frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha}=1.$$

2) Η U(α,β) είναι η πιο απλή συνεχής κατανομή και η σημασία της έγκειται στο γεγονός ότι η τ.μ. X:U(α,β) παίρνει τιμές σε ένα υποδιάστημα [γ,δ] του διαστήματος [α,β] με την ίδια πιθανότητα ανεξάρτητα από τη θέση του [γ,δ], δηλ. η κατανομή πιθανότητας της U(α,β) είναι σταθερή στο διάστημα [α,β] και μηδέν εκτός αυτού.

Πράγματι: $$P(X\in[\gamma,\delta])=\int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\gamma}^{\delta} dx=\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}.$$

3) Επειδή η τ.μ. X:U(α,β) είναι συνεχής, *άρα* $P(X=x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, ***αφού η πιθανότητα στις συνεχείς τ.μ. δεν εκχωρείται (δεν αποδίδεται) σε σημεία αλλά μόνο σε διαστήματα***.
Έτσι, η X:U(α,β) αποδίδει την πιθανότητα ανάλογα με το μήκος του διαστήματος, και συνεπώς κατά την U(α,β) ισομήκη διαστήματα είναι και ισοπίθανα.

4) Η αθροιστική κατανομή F(x) της ομοιόμορφης τ.μ. X μετά από ολοκλήρωση της f(x) βρίσκεται ότι είναι:

$$\boxed{F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\begin{cases}0, & \text{όταν } -\infty<x<\alpha\\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \text{όταν } \alpha\leq x<\beta\\ 1, & \text{όταν } \beta\leq x<\infty\end{cases}} \qquad \textbf{(4α)}$$

Προφανώς αντίστροφα, παραγωγίζοντας την F(x) βρίσκουμε την f(x).

Παραδείγματα *(στην Ομοιόμορφη κατανομή)*

1) Μια τ.μ. X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή με κατανομή πιθανότητας $f(x)=\frac{1}{100}$, όταν $0\leq x\leq 100$.
Να υπολογιστούν οι πιθανότητες: $P(X>60)$, $P(20\leq X\leq 40)$.

Λύση

$$P(X>60)=\int_{60}^{100}\frac{1}{100}dx=\frac{1}{100}(100-60)=0.4,$$

και

$$P(20\le X\le 40)=\int_{20}^{40}\frac{1}{100}dx=\frac{1}{100}(40-20)=0.2\,.$$

2) Έστω ότι το μετρό περνάει από έναν συγκεκριμένο σταθμό κάθε 10 λεπτά, ξεκινώντας στις 5 π.μ. Αν ένας επιβάτης φτάνει στο σταθμό σε χρόνο που κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα 7.20 έως 7.40, να υπολογιστούν οι πιθανότητες να περιμένει το μετρό: α) το πολύ 4 λεπτά, β) τουλάχιστον 7 λεπτά.

Λύση

Έστω X ο χρόνος άφιξης του επιβάτη στο σταθμό, με αρχή τη χρονική στιγμή 7.20.
Τότε η τ.μ. X ακολουθεί την Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα [α,β]=[0,20], οπότε κατά την (4α) είναι:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\begin{cases}0, & \text{όταν } -\infty<x<0\\ \dfrac{x}{20}, & \text{όταν } 0\le x<20\\ 1, & \text{όταν } 20\le x<\infty\end{cases}$$

α) Το ενδεχόμενο A={ο επιβάτης να περιμένει το πολύ 4 λεπτά} είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο να φτάσει στο σταθμό στο διάστημα 7.26 έως 7.30, είτε στο διάστημα 7.36 έως 7.40.

Συνεπώς,

$$P(A)=P(6<X\le 10)+P(16<X\le 20)=\{F(10)-F(6)\}+\{F(20)-F(16)\}=$$
$$=\left\{\tfrac{10}{20}-\tfrac{6}{20}\right\}+\left\{\tfrac{20}{20}-\tfrac{16}{20}\right\}=\tfrac{4}{20}+\tfrac{4}{20}=\tfrac{2}{5},$$

αφού ως γνωστόν για τις συνεχείς τ.μ. ισχύει:

$$P(\alpha<x<\beta)=P(\alpha\le x<\beta)=P(\alpha<x\le\beta)=P(\alpha\le x\le\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt=F(\beta)-F(\alpha)\,.$$

β) Το ενδεχόμενο B={ο επιβάτης να περιμένει τουλάχιστον 7 λεπτά} είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο να φτάσει στο σταθμό στο διάστημα 7.20 έως 7.23, είτε στο διάστημα 7.30 έως 7.33.
Συνεπώς,

$$P(B)=P(0<X\le 3)+P(0<X\le 13)=\{F(3)-F(0)\}+\{F(13)-F(10)\}=$$
$$=\left\{\tfrac{3}{20}-\tfrac{0}{20}\right\}+\left\{\tfrac{13}{20}-\tfrac{10}{20}\right\}=\tfrac{3}{20}+\tfrac{3}{20}=\tfrac{3}{10}\,.$$

4.3. ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΒΑΣΙΚΩΝ τ.μ. και ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

1. ***Μέση τιμή της διωνυμικής κατανομής***

Έστω μια διωνυμική τ.μ. X:B(n,p). Τότε, **E(X)=np**.

Απόδειξη

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n} xf(x)=\sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\sum_{x=0}^{n} x\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}=$$

$$=\sum_{x=1}^{n} x\frac{n!}{x(x-1)!(n-x)!}p^x q^{n-x}=\sum_{x=1}^{n}\frac{n!}{(x-1)!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}=$$

$$=np\sum_{x=1}^{n}\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-x}=(\text{θέτουμε, } x-1=y,\quad n-1=m)$$

$$=np\sum_{y=0}^{m}\binom{m}{y}p^y(1-p)^{m-y}=np.$$

2. Μέση τιμή της κατανομής Poisson

Έστω X:P(λ). Τότε, **E(X)=λ**.

Απόδειξη

$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty} xe^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{\lambda^x}{x(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}=\lambda e^{-\lambda}(e^{\lambda})=\lambda.$$

3. Μέση τιμή της Κανονικής κατανομής

Έστω X:N(μ,σ²). Τότε, **E(X)=μ**.

Πράγματι: Αφού X:N(μ,σ²), τότε $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}:N(0,1)$,

(δηλ. αφού X κανονική τ.μ., τότε $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ θα είναι τυποποιημένη κανονική τ.μ.),

και επειδή από τον ολοκληρωτισμό λογισμό είναι γνωστό ότι, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2}x^2}dx=\sqrt{2\pi}$

και $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{\nu} e^{\frac{-1}{2}x^2}dx=0$ όταν ν περιττός, τότε:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma y+\mu)e^{\frac{-1}{2}y^2}\sigma dy=$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} ye^{\frac{-1}{2}y^2}dy+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2}y^2}dy=0+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\mu.$$

4. Μέση τιμή της Ομοιόμορφης κατανομής

Έστω X:U(α,β). Τότε, **E(X)=(α+β)/2**.

Πράγματι: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} x\frac{1}{\beta-\alpha}dx=\frac{1}{\beta-\alpha}=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{2}.$

4.4. ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΒΑΣΙΚΩΝ τ.μ.

1. Διασπορά της διωνυμικής κατανομής
Αν X:B(n,p), τότε **V(X)=npq**.
Απόδειξη
Από τις ιδιότητες της διασποράς, (βλ. §3.5.5, τύπος (9δ)), έχουμε:
$V(X)=E[X(X-1)]+\mu-\mu^2$, ενώ για τη διωνυμική ως γνωστόν είναι $\mu=E(X)=np$.
Άρα, αρκεί να υπολογιστεί το E[X(X-1)]. Οπότε,

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^x q^{n-x}. = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}. = \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}. =$$

$$n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)![(n-2)-(x-2)]!}p^{x-2}q^{(n-2)-(x-2)}. = n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n}\binom{n-2}{x-2}p^{x-2}q^{(n-2)-(x-2)} =$$

(θέτουμε x - 2 = y και n - 2 = m)

$$= n(n-1)p^2\left(\begin{matrix}\text{(διώνυμο Νεύτωνα)}\\ \sum_{y=0}^{m}\binom{m}{y}p^y q^{m-y}\end{matrix}\right) = n(n-1)p^2(p+q)^2 = n(n-1)p^2.(1) = n(n-1)p^2.$$

Συνεπώς:
$V(X)=E[X(X-1)]+\mu-\mu^2= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq.$

2. Όμοια βρίσκουμε:

Διασπορά της κατανομής Poisson: <u>V(X)=λ</u>

Διασπορά της Κανονικής κατανομής: <u>V(X)=σ²</u>

Διασπορά της Ομοιόμορφης κατανομής: <u>V(X)</u>= $\frac{(\alpha-\beta)^2}{12}$, κτλ.

(Βλ. Συνοπτικά στοιχεία των βασικών τ.μ. στον επόμενο Πίνακα).

Πίνακας Βασικών τ.μ. και Κατανομών

Τυχαία Μεταβλητή Χ	Κατανομή Πιθανότητας $f(x)=P(X=x)$	Μέση Τιμή μ=E(X)	Διασπορά $\sigma^2(X)=V(X)$	Παρατηρήσεις
Διωνυμική B(n,p)	$\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$, n=επαναλήψεις π.τ., x=0,1,2,…,n (επιτυχίες), p=πιθανότητα επιτυχίας, q=1-p=πιθανοτητα αποτυχίας	np	npq	$p\in[0,1]$, $q=1-p$ -------------------- **Bernoulli, B(1,p):** $f(x)=p^x q^{1-x}$, $x=0,1$
Poisson P(x,λ)	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, $(\lambda>0,\ x=0,1,2,...)$	λ	λ	Προσέγγιση της Διωνυμικής από την Poisson, όταν $n\to\infty$ και $p\to 0$
Αρνητική Διωνυμική (Pascal)	$\binom{x-1}{\nu-1}\theta^{\nu}(1-\theta)^{x-\nu}$ $x=\nu,\nu+1,...,\ \ 0<\theta<1,\ \ \nu>0$	$\frac{\nu}{\theta}$	$\frac{\nu(1-\theta)}{\theta^2}$	Για ν=1, παίρνουμε τη **Γεωμετρική Κατανομή** με $f(x)=\theta(1-\theta)^{x-1}$, $x=1,2,...$
Υπεργεω-μετρική	$\frac{\binom{\ell}{x}\binom{n-\ell}{\nu-x}}{\binom{n}{x}}$ όπου $0\le\ell\le n,\ \ 1\le\nu\le n$	$\frac{\nu\ell}{n}$	$\frac{\nu\ell}{n}(\frac{\nu-\ell}{n})\frac{n-\nu}{n-1}$	Έστω n σφαιρίδια, ℓ λευκά και (n-ℓ) μαύρα. Σε δείγμα μεγέθους ν, η πιθανότητα για x λευκά είναι, $f(x)=P(X=x)$
Κανονική (Gauss) N(μ,σ²)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $(x,\mu\in\mathbb{R},\ \sigma>0)$	μ	σ^2	**Τυπική Κανονική** Αν X:N(μ,σ²) τότε $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}:N(0,1)$
Ομοιόμορφη U(α,β)	$\begin{cases}\frac{1}{\beta-\alpha}, & \text{όταν } x\in[\alpha,\beta],\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha<\beta\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{(\alpha-\beta)^2}{12}$	
Γάμμα G(α,β)	$\begin{cases}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x>0,\ \alpha,\beta>0\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	Γάμμα συνάρτηση, $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$. Για α=1, **Εκθετική** τ.μ.
Βήτα	$\frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta-1}}{B(\gamma,\delta)}$, $0<x<1$	$\frac{\gamma}{\gamma+\delta}$	$\frac{\gamma\delta}{(\gamma+\delta)^2(\gamma+\delta+1)}$	$B(\gamma,\delta)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\gamma+\delta)}$. Αν γ=δ=1, τότε η B(1,1) γίνεται U(0,1).
X^2_{ν} (Χι-τετράγωνο)	$\begin{cases}\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\frac{\nu}{2})}x^{(\nu/2)-1}e^{-x/2}, & x\ge 0\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$	ν	2ν	ν=βαθμοί ελευθερίας. Η X^2_{ν} είναι Γάμμα κατανομή για $\alpha=\frac{\nu}{2}$ και $\beta=\frac{1}{2}$
Student (t)	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\nu\pi}}(1+\frac{x^2}{\nu})^{-(\nu+1)/2}$, $x\in\mathbb{R},\ \ \nu\in\mathbb{N}$	0 (όταν ν>1)	$\frac{\nu}{\nu-2}$ (όταν ν>2)	Αν $\nu\to\infty$, τότε $(1+\frac{x^2}{\nu})^{-\nu}\to e^{-x^2}$, δηλ. για μεγάλο ν (ν>30) προσεγγίζει την N(0,1)

4.5. ΆΛΛΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1. Ροπές

Α) ***Ροπή n-τάξης*** μιας τ.μ. Χ λέγεται η ποσότητα:

$$E(X^n) = \begin{cases} \sum\limits_x x^n f(x), & X=\text{διακριτή τ.μ.} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)dx, & X=\text{συνεχής τ.μ} \end{cases} \qquad (n = 1, 2, ...)$$

Β) ***Κεντρική Ροπή n-τάξης*** μιας τ.μ. Χ, είναι:

$$E[X - E(X)]^n = \begin{cases} \sum\limits_x [X-E(X)]^n f(x), & X=\text{διακριτή τ.μ.} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [X-E(X)]^n f(x)dx, & X=\text{συνεχής τ.μ} \end{cases} \qquad (n = 1, 2, ...)$$

Γ) ***Παραγοντική Ροπή $1^{ης}$ τάξης*** μιας τ.μ. Χ, είναι:

$$E[X(X-1)] = \begin{cases} \sum\limits_x x(x-1)f(x), & X=\text{διακριτή τ.μ.} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(x-1)f(x)dx, & X=\text{συνεχής τ.μ} \end{cases}$$

Δ) ***Παραγοντική Ροπή n-τάξης*** μιας τ.μ. Χ, είναι:

$$E[X(X-1)...(X-n+1)] = \begin{cases} \sum\limits_x x(x-1)...(x-n+1)f(x), & X=\text{διακριτή τ.μ.} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(x-1)...(x-n+1)f(x)dx, & X=\text{συνεχής τ.μ} \end{cases}$$

Παρατηρήσεις
α) Η διασπορά $\sigma^2(X)$ μιας τ.μ. Χ είναι η κεντρική ροπή $2^{ης}$ τάξης.
β) Οι προαναφερθείσες ιδιότητες της διασποράς $\sigma^2(X)$, είναι διάφορες εκφράσεις της σ^2 μέσω των διάφορων ροπών.

2. *Κορυφή, Ποσοστιαία Σημεία, Διάμεσος μιας τ.μ.*

Εκτός από τη Μέση Τιμή, τη Διασπορά και τις Ροπές που χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά μιας κατανομής, υπάρχουν και άλλα ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά μιας τ.μ., όπως η Κορυφή, τα Ποσοστιαία Σημεία, η Διάμεσος, κτλ.
Πιο συγκεκριμένα:

Α) Αν για μια τ.μ. υπάρχει ένας αριθμός k, τέτοιος ώστε, $f(k) = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$,
τότε αυτός ο αριθμός k λέγεται ***κορυφή*** της f.

Αν ο k είναι μοναδικός τότε η f λέγεται μονοκόρυφη, ενώ αν υπάρχουν περισσότεροι αριθμοί με την παραπάνω ιδιότητα του k τότε η f λέγεται πολυκόρυφη.
Η εύρεση των κορυφών μιας κατανομής είναι πρόβλημα αντίστοιχο της εύρεσης των μέγιστων μιας συνάρτησης.

Β) Έστω Χ μια τ.μ. με γνησίως αύξουσα αθροιστική κατανομή F και έστω ένας αριθμός $p \in (0,1)$.

Τότε το σημείο x_p που ορίζεται μονοσήμαντα από τη σχέση,

$$\begin{cases} P(X \le x_p) = F(x_p) = p, & X=\text{συνεχής τ.μ} \\ P(X < x_p) \ge p, & X=\text{διακριτή τ.μ.} \end{cases}$$

λέγεται p-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της τ.μ. Χ.

Για p=0.25 το αντίστοιχο σημείο $x_p = x_{0.25}$ λέγεται ***1^ο^ τεταρτημόριο*** *της κατανομής,*

για p=0.50 το αντίστοιχο σημείο $x_p = x_{0.50}$ λέγεται ***διάμεσος*** της κατανομής,

ενώ για p=0.75 το σημείο $x_p = x_{0.75}$ λέγεται ***3^ο^ τεταρτημόριο*** της κατανομής.

Παραδείγματα

1) Για p=0.25, 0.50, 0.60, να βρεθούν τα αντίστοιχα σημεία x_p, όταν X:U(α,β).
Λύση

Έχουμε, $P(X \le x_p) = F(x_p) = \int_\alpha^{x_p} \frac{1}{\beta-\alpha}dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^{x_p} dx = \frac{x_p-\alpha}{\beta-\alpha} = p \Leftrightarrow x_p = \alpha + p(\beta-\alpha)$.

Οπότε:

$$x_p = x_{0.25} = \alpha + 0.25(\beta-\alpha), \qquad x_{0.50} = \alpha + 0.50(\beta-\alpha), \qquad x_{0.60} = \alpha + 0.60(\beta-\alpha)\ .$$

Αν X:U(α=0,β=1), τότε έχουμε:

$$x_{0.25} = \alpha + 0.25(\beta-\alpha) = 0 + 0.25(1-0) = 0.25, \qquad x_{0.50} = 0.50, \qquad x_{0.60} = 0.60\ .$$

2) Για p=0.2, 0.5, 0.8, να βρεθούν τα αντίστοιχα σημεία x_p, όταν $X:N(\mu,\sigma^2)$ και X:N(0,1).
Λύση

Έχουμε,

$$P(X \le x_p) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_p-\mu}{\sigma}\right) = F_1\left(\frac{x_p-\mu}{\sigma}\right) = p \Leftrightarrow \frac{x_p-\mu}{\sigma} = F_1^{-1}(p) \Leftrightarrow x_p = \mu + \sigma F_1^{-1}(p).$$

Από τον πίνακα της τυπικής κανονικής κατανομής, βρίσκουμε:

$$F_1^{-1}(0.2) = -0.84178, \qquad F_1^{-1}(0.5) = 0, \qquad F_1^{-1}(0.8) = 0.84178.$$

Όταν X:N(0,1) τότε βρίσκουμε:

$$x_{0.2} = -0.84178, \qquad x_{0.5} = 0, \qquad x_{0.8} = 0.84178.$$

4.6. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ Markov-Tchebichev, ΚΕΝΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Στα προηγούμενα είδαμε ότι η κατανομή πιθανότητας μιας τ.μ., μας δίνει όλες τις πληροφορίες για την τ.μ.
Επίσης άλλα μέτρα (αριθμοί), όπως η μέση τιμή, η διασπορά, καθώς και άλλες ροπές, μας δίνουν σημαντικές πληροφορίες για τη τ.μ. Στην περίπτωση λοιπόν όπου δεν γνωρίζουμε την κατανομή της τ.μ., αλλά γνωρίζουμε μόνο τη μέση τιμή, ή τη διασπορά της τ.μ., μπορούμε να αντλήσουμε πρόσθετες πληροφορίες για την κατανομή πιθανότητας της τ.μ., χρησιμοποιώντας κατάλληλες ανισότητες με φράγματα για πιθανότητες ενδεχομένων καθώς και τα Κεντρικά Οριακά Θεωρήματα.
Πιο συγκεκριμένα, σχετικά έχουμε:

1. ***Ανισότητα Markov***
Έστω η τ.μ. X που παίρνει μόνο θετικές τιμές. Τότε για κάθε σταθερά, α>0, ισχύει η ανισότητα,

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}.$$

2. ***Ανισότητα Chebychev***
Μια απλή αλλά αρκετά χρήσιμη σχέση που οφείλεται στον Ρώσο μαθηματικό *Chebichev (Τσέμπιτσεφ)*, είναι η ομώνυμη ανισότητα που χρησιμοποιείται συχνά στους Νόμους των Μεγάλων Αριθμών. Με τη βοήθεια της ανισότητας Chebichev μπορούμε να βρούμε ένα φράγμα μιας συγκεκριμένης πιθανότητας, (μερικές φορές δίνει τετριμμένα αποτελέσματα αλλά συχνά μας δίνει σπουδαία αποτελέσματα).
Συγκεκριμένα, έχουμε:

Έστω η τ.μ. X με πεπερασμένη μέση τιμή μ και διασπορά σ^2.
Τότε για κάθε σταθερά κ>0, ισχύει η ανισότητα:

$$P(|X-\mu| \geq \kappa) \leq \frac{\sigma^2}{\kappa^2}, \quad \text{είτε} \quad P(|X-\mu| \geq \kappa\sigma) \leq \frac{1}{\kappa^2}, \quad (\kappa = 1, 2, ...),$$

όπου μ=μέση τιμή και σ=τυπική απόκλιση, της τ.μ. X.

Μια πιο απλή έκφραση της ανισότητας Tchebichev, είναι:
«Από ν μετρήσεις $x_1, x_2, ..., x_\nu$, τουλάχιστον οι $1-\frac{1}{\kappa^2}$, $(\kappa = 1, 2, ...)$ από αυτές τις μετρήσεις βρίσκονται στο διάστημα (μ-κσ, μ+κσ).

3. Οι τ.μ. X_1, X_2, …,X_ν, (ανεξάρτητες ή όχι) οι οποίες ακολουθούν την ίδια κατανομή, λέγονται ***ισόνομες***.

4. ***Νόμοι των Μεγάλων Αριθμών***
α) *Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών του Chebychev:*
Έστω ν ανεξάρτητες τ.μ. X_1, X_2, …,X_ν, με $E(X_i)=\mu_i$ και $V(X_i)=\sigma_i^2$, i=1,…,ν,
και έστω ότι, $\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^{\nu} \sigma_i^2 = 0$.

Τότε, $\lim_{\nu\to\infty} (\bar{X}_\nu - \bar{\mu}_\nu) = 0$, όπου $\bar{X}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i$ και $\bar{\mu}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} \mu_i$.

β) *Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών του Chebychev:*
Έστω ν ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$, με $E(X_i)=\mu$, $i=1,\ldots,\nu$.
Τότε, $\bar{X}_\nu \to \mu$.

Παρατήρηση
Ας σημειωθεί ότι υπάρχουν και άλλοι Νόμοι των Μεγάλων Αριθμών καθώς και διάφορες άλλες Ανισότητες, με σημαντική χρησιμότητα τόσο για τη θεωρητική τους προοπτική, όσο και για τη χρήση τους στις εφαρμογές.

5. *Κεντρικά Οριακά Θεωρήματα*

Μεταξύ των διάφορων Κεντρικών Οριακών Θεωρημάτων της Πιθανοθεωρίας, αναφέρουμε το *Κεντρικό Οριακό Θεώρημα των Lindeberg-Levy* που αφορά την Κανονική κατανομή, το *Κεντρικό Οριακό Θεώρημα των De Moivre-Laplace* που αφορά στη Διωνυμική κατανομή, κτλ.

Πιο συγκεκριμένα *(Κεντρικό Οριακό Θεώρημα των Lindeberg-Levy)*:
Έστω η ακολουθία ν ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$, με $E(X_i)=\mu$ και $V(X_i)=\sigma^2$, $i=1,\ldots\nu$.
Έστω επίσης η ακολουθία των τυποποιημένων μέσων, $Z_i = \dfrac{\bar{X}_i - \mu}{\sigma/\sqrt{i}}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$,

καθώς και η αντίστοιχη ακολουθία των αθροιστικών κατανομών πιθανότητας $F_i(z)$.

Τότε, $\lim_{i\to\infty} F_i(z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}}\, dy$,
όπου Φ(z) είναι η αθροιστική κατανομή πιθανότητας της Κανονικής κατανομής.

Παρατήρηση

Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα θεωρείται το κορυφαίο αποτέλεσμα της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Το Θεώρημα αυτό με απλά λόγια λέει ότι:
Αν έχουμε μια ακολουθία ν ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. (π.χ. εκθετικές τ.μ. με παράμετρο θ, ή Poisson τ.μ. με παράμετρο λ, είτε ομοιόμορφες τ.μ. στο διάστημα [α,β], κτλ),
τότε θεωρώντας τον μέσο $\bar{X}_\nu$ και τυποποιώντας, δηλ. αφαιρώντας τη μέση τιμή μ και διαιρώντας με την τυπική απόκλιση σ, η νέα ακολουθία που προκύπτει συγκλίνει στην Κανονική κατανομή.

Αυτός είναι και ο βασικός λόγος που η Κανονική κατανομή θεωρείται η πιο σημαντική στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού είναι αρκετά απαιτητική για τους σκοπούς αυτών των στοιχειωδών διδακτικών σημειώσεων, αλλά ο απαιτητικός αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην επισυναπτόμενη βιβλιογραφία στο τέλος των Σημειώσεων.

Παραδείγματα

1) 25 μετρήσεις ενός μεγέθους, έδωσαν μέση τιμή 75 και διασπορά 100.
Να εκφραστεί η κατανομή των μετρήσεων, μέσω της ανισότητας Chebichev.

Λύση

Έχουμε: ν=25, μ=75, σ^2=100, σ=10.

Άρα, οι μετρήσεις κατανέμονται ως προς τη μέση τιμή μ, ως εξής:

Αν κ=1, τότε $1-\frac{1}{\kappa^2}=1-\frac{1}{1^2}=0$, δηλ. τουλάχιστον 0 μετρήσεις βρίσκονται στο διάστημα $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)=(75-10,75+10)=(65,85)$.

Αν κ=2, τότε $1-\frac{1}{\kappa^2}=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$, δηλ. τουλάχιστον $\frac{3}{4}$ των μετρήσεων βρίσκονται στο διάστημα $(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)=(75-2\times10,75+2\times10)=(55,95)$.

Αν κ=3, τότε $1-\frac{1}{\kappa^2}=1-\frac{1}{3^2}=\frac{8}{9}$, δηλ. τουλάχιστον $\frac{8}{9}$ των μετρήσεων βρίσκονται στο διάστημα $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)=(75-3\times10,75+3\times10)=(45,105)$.

Αν κ=4, τότε $1-\frac{1}{\kappa^2}=1-\frac{1}{4^2}=\frac{15}{16}$, δηλ. τουλάχιστον $\frac{15}{16}$ των μετρήσεων βρίσκονται στο διάστημα $(\mu-4\sigma,\mu+4\sigma)$, κτλ.

2) Με χρήση της ανισότητας Chebichev να βρεθεί το κατώτερο φράγμα της πιθανότητας $P(-1<X<5)$, όταν η τ.μ. είναι η διωνυμική X:B(4, ½).

Λύση

Έχουμε, $P(|X-\mu|\geq\kappa\sigma)\leq\frac{1}{\kappa^2}\Leftrightarrow P(|X-\mu|<\kappa\sigma)>1-\frac{1}{\kappa^2}$.

Αλλά, $\sigma^2(X)=npq=4\frac{1}{2}\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow\sigma(X)=1$, οπότε, $P(|X-\mu|<\kappa.1)>1-\frac{1}{\kappa^2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(\mu-\kappa<X<\mu+\kappa)>1-\frac{1}{\kappa^2}\Leftrightarrow P(2-\kappa<X<2+\kappa)>1-\frac{1}{\kappa^2}.$$

Με κ=3, παίρνουμε:

$$P(2-3<X<2+3)>1-\frac{1}{\kappa^2}\Leftrightarrow P(-1<X<5)>1-\frac{1}{3^2}=\frac{8}{9},$$

δηλ. το κατώτερο πέρας της πιθανότητας $P(-1<X<5)$ είναι 8/9 .

4.7. Γενικές Ασκήσεις *(στις τ.μ.)*

1. Να προσδιοριστεί η σταθερά c ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι κατανομές πιθανότητας μιας τ.μ.:

α) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{c}, & x = 1,2,...,k \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ και β) $g(x) = \begin{cases} cx^2, & x = 1,2,...,k \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Λύση

α) Πρέπει, $\sum_x f(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{k} \frac{2x}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{c}(1+2+...+k) = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{c}\frac{k(k+1)}{2} = 1 \Leftrightarrow c = k(k+1)$.

β) Όμοια πρέπει,

$$\sum_x g(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{k} cx^2 = 1 \Leftrightarrow c(1^2 + 2^2 + ... + k^2) = 1 \Leftrightarrow c\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{6}{k(k+1)(2k+1)}.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση,

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

α) Να δειχτεί ότι η f(x) είναι κατανομή πιθανότητας μιας τ.μ. X.

β) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες,

i) $P(X > 0)$, ii) $P(|X| > \frac{1}{2})$, iii) $P(X < \frac{3}{2} \| X| > \frac{1}{2})$, δηλ. $P(X < \frac{3}{2}$, όταν $|X| > \frac{1}{2})$.

γ) Να βρεθεί η αθροιστική κατανομή F(x).

δ) Να υπολογιστούν, E(X) και V(X).

Λύση

α) Καταρχήν ισχύει ότι, $f(x) \ge 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Επίσης είναι,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (1-|x|)dx = \int_{-1}^{0} (1+x)dx + \int_{0}^{1} (1-x)dx = [x + \frac{x^2}{2}]_{-1}^{0} + [x - \frac{x^2}{2}]_{0}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Άρα, η f(x) είναι κατανομή πιθανότητας μιας τ.μ. X.

β) i) $P(X > 0) = \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}$,

ii) $P(|x| > \frac{1}{2}) = P(X > \frac{1}{2}) + P(X < -\frac{1}{2}) = \int_{1/2}^{1} (1-x)dx + \int_{-1/2}^{-1} (1+x)dx = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$,

iii) $P(X < \frac{3}{2} \| X| > \frac{1}{2}) = \dfrac{P[X<\frac{3}{2})(|X|>\frac{1}{2})]}{P(|X|>\frac{1}{2})} = \dfrac{P[(-1<X<\frac{-1}{2})(1<X<\frac{1}{2})]}{\frac{1}{4}} = \dfrac{P[-(1<X<\frac{1}{2})(1<X<\frac{1}{2})]}{\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$

$$\gamma)\quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \int_{-1}^{x} (1+x)dx, & -1 < x \le 0 \\ \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} (1-x)dx, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{(1+x)^2}{2}, & -1 < x \le 0 \\ 1 - \frac{(1-x)^2}{2}, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

δ) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-1}^{0} x(1+x)dx + \int_{0}^{1} x(1-x)dx = [\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}]_{-1}^{0} + [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_{0}^{1} = [\frac{-1}{2} + \frac{1}{3}] + [\frac{1}{2} - \frac{1}{3}] = 0,$

και

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)dx = [\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}]_{-1}^{0} + [\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}]_{0}^{1} = [\frac{1}{3} - \frac{1}{4}] + [\frac{1}{3} - \frac{1}{4}] =$

$= \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{1}{6},$

οπότε,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}.$$

3. Δίνεται η συνάρτηση,

$$f(x) = \begin{cases} ke^{x}, & \text{για } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{αλλού, (δηλ. } x \notin [0,1]) \end{cases}$$

Να εξεταστεί για ποια τιμή του k η f(x) είναι κατανομή πιθανότητας μιας τ.μ. X.

Λύση

Καταρχήν πρέπει, $f(x) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, οπότε $ke^x \ge 0 \Leftrightarrow k \ge 0,\ \forall x[0,1]$.

Επίσης πρέπει,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{0}^{1} ke^{x}dx = 1 \Leftrightarrow k\int_{0}^{1} e^x dx = 1 \Leftrightarrow k[e^x]_0^1 = 1 \Leftrightarrow k[e-1] = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{e-1} = \frac{1}{2.71-1} = \frac{1}{1.71}.$$

Άρα, για $k = \frac{1}{1.71}$. η f(x) είναι κατανομή πιθανότητας μιας τ.μ. X.

5. ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Στα προηγούμενα ασχοληθήκαμε με την εξέταση ενός χαρακτηριστικού σε ένα πείραμα τύχης, χρησιμοποιώντας μια τυχαία μεταβλητή. Σε πολλά όμως προβλήματα συχνά χρειάζεται να εξετάζουμε ταυτόχρονα πολλά χαρακτηριστικά ενός πληθυσμού, όπως π.χ. τα έσοδα και τα έξοδα μιας εταιρείας, τη θερμοκρασία και την πίεση ενός λέβητα, το βάρος το ύψος και την ηλικία των μαθητών ενός σχολείου, τον αριθμό των μελών μιας οικογένειας και τα δωμάτια κατοικίας τους, το εισόδημα και τις δαπάνες των μισθωτών, τους δείκτες αίματος-σακχάρου-χοληστερίνης-βάρους-ηλικίας, κ.λπ. διάφορων ασθενών.
Έχει δηλ. σημασία να εξετάζονται δύο ή περισσότερα χαρακτηριστικά μαζί, καθώς και η πιθανή συσχέτιση μεταξύ των χαρακτηριστικών-μεταβλητών ως προς τις οποίες μελετάμε έναν πληθυσμό, αφού ως γνωστόν τα υψηλότερα εισοδήματα δαπανούν συνήθως και περισσότερα, οι πολυπληθέστερες οικογένειες κατοικούν και σε μεγαλύτερες κατοικίες, ή γενικότερα το σάκχαρο και η χοληστερίνη σχετίζονται με το βάρος και τη διατροφή ενός πλήθους ατόμων, κτλ.

Οπότε τόσο από θεωρητική όσο και από πρακτική άποψη προκύπτει η ανάγκη της ταυτόχρονης ή από κοινού χρήσης περισσότερων της μιας τ.μ. Έτσι ένας πληθυσμός που εξετάζεται ταυτόχρονα ως προς δύο (ή περισσότερες μεταβλητές), λέγεται ***διμεταβλητός*** (γενικά *πολυμεταβλητός)* και αντίστοιχα μιλάμε για ***διδιάστατες*** *(πολυδιάστατες)* ***τυχαίες μεταβλητές και κατανομές***.
Θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με τις απλούστερες πολυδιάστατες τ.μ. δηλ. με τις διδιάστατες, επεκτείνοντας ανάλογα τις σχετικές έννοιες και για τις πολυδιάστατες τ.μ. (τρισδιάστατες, κτλ).

Κατ' αυτόν τον τρόπο, θεωρώντας X_1, X_2 δύο τ.μ. στον ίδιο δειγματοχώρο Ω, το ενδεχόμενο $\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2\}$ ισοδυναμεί με την τομή των ενδεχομένων $\{X_1 \le x_1\} \cap \{X_2 \le x_2\}$ που εκφράζει την ταυτόχρονη πραγματοποίηση και των δύο ενδεχομένων. Ο υπολογισμός της πιθανότητας τέτοιου είδους ενδεχομένων οδηγεί στην ανάγκη να προσδιοριστεί η από κοινού συμπεριφορά των δύο τυχαίων μεταβλητών, που εκφράζεται μέσω της έννοιας της διδιάστατης τ.μ. (X_1, X_2).
Έτσι, η από κοινού μελέτη δύο χαρακτηριστικών ενός δειγματοχώρου διευκολύνεται (μαθηματικοποιείται) αντιστοιχίζοντας σε κάθε δειγματικό σημείο $\omega \in \Omega$ ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Εξάλλου, από τη μελέτη της τ.μ. (X_1, X_2) μπορούμε να επεξεργαστούμε και διάφορες άλλες χρήσιμες συναρτήσεις αυτής, που είναι συνήθως νέες τ.μ. όπως, π.χ.

$$Z = X_1 + X_2, \quad Z = X_1 - X_2, \quad Z = X_1 X_2, \quad Z = X_1 / X_2, \quad Z = \ln(X_1 + X_2),$$
$$Z = \max\{X_1 + X_2\}, \quad Z = \min\{X_1 + X_2\}, \quad Z = 2X_1 + 3X_2, \quad \text{κτλ},$$

καθώς και άλλων πιο σύνθετων μορφών συναρτήσεων g της τ.μ. (X_1, X_2).

Επίσης, μπορούμε να εξετάζουμε την πιθανή συσχέτιση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών που απαρτίζουν μια διδιάστατη τ.μ., μέσω της συνδιασποράς και του συντελεστή γραμμικής (ή μη-γραμμικής, γενικότερα) συσχέτισης, καθώς και μέσω της «Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων», όπως θα δούμε σ' αυτή την ενότητα.

5.1. Διδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

Έστω ένα πείραμα τύχης με δειγματοχώρο Ω, όπου θεωρούμε ένα ζεύγος τυχαίων μεταβλητών (X_1, X_2) με τιμές $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, ως εξής:

Αν $X_1 : \omega \in \Omega \to X_1(\omega) = x_1 \in \mathbb{R}$ και $X_2 : \omega \in \Omega \to X_2(\omega) = x_2 \in \mathbb{R}$,
είναι δύο (μονοδιάστατες) τ.μ.,
τότε η συνάρτηση που σε κάθε $\omega \in \Omega$ αντιστοιχίζει ένα ζεύγος $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, δηλ.

$$\begin{aligned} & X \equiv (X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2, \\ & \omega \mapsto X(\omega) = \left(X_1(\omega), X_2(\omega)\right) = (x_1, x_2) = x \in X(\Omega) = S \subseteq \mathbb{R}^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

λέγεται ***διδιάστατη τ.μ.*** ή ***τυχαίο διδιάστατο διάνυσμα***.

Π.χ. όταν X_1 εκφράζει το βάρος και X_2 το ύψος των μαθητών ενός σχολείου, είτε X_1 εκφράζει τον αριθμό των μελών μιας οικογένειας και X_2 εκφράζει τον αριθμό των δωματίων της κατοικίας τους, τότε $X = (X_1, X_2)$ είναι μια διδιάστατη τ.μ.

Γενικότερα, κάθε συνάρτηση

$$\begin{aligned} & X \equiv (X_1, X_2, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad \text{δηλ.} \\ & \omega \mapsto X(\omega) = \left(X_1(\omega), ..., X_n(\omega)\right) = (x_1, x_2, ..., x_n) = x \in X(\Omega) = S \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

λέγεται ***πολυδιάστατη τυχαία μεταβλητή*** ή ***τυχαίο πολυδιάστατο διάνυσμα,*** που έχει *κατανομή πιθανότητας* f(x) και *αθροιστική κατανομή* F(x), αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} & f \equiv P : \mathbb{R}^n \to [0,1], \quad \text{όπου } B \mapsto P(B) = P\{\omega\in\Omega / X(\omega) = x \in B\} \equiv P\left[X^{-1}(B)\right] \\ & \text{και} \quad F(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, ..., X_n \le x_n), \quad \forall x_i \in \mathbb{R}, \ (i = 1, ..., n). \end{aligned} \qquad \textbf{(3)}$$

Διακρίνουμε και τις πολυδιάστατες τ.μ. σε δύο είδη, τις διακριτές και τις συνεχείς.

5.2. Διδιάστατες Διακριτές τ.μ.

1. Ονομάζουμε ***διακριτή διδιάστατη τ.μ.*** (X_1, X_2) μια συνάρτηση της μορφής (1) με πεπερασμένο ή το πολύ αριθμήσιμο πλήθος τιμών $(x_1, x_2) = x \in X(\Omega) = S \subseteq \mathbb{R}^2$, (δηλ. όπου καθεμιά από τις X_1, X_2 είναι διακριτή τ.μ. στον ίδιο δειγματοχώρο Ω).

2. Λέμε ***κοινή κατανομή πιθανότητας της διακριτής διδιάστατης τ.μ.*** (X_1, X_2), ή των διακριτών τ.μ. X_1 και X_2 επί του ίδιου δειγματοχώρου Ω, τη συνάρτηση,

$$f \equiv P : x = (x_1, x_2) \in X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^2 \to f(x) = f(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X = x) \in [0,1],$$

που συμβολίζεται και f_{X_1, X_2}, η οποία έχει τις ιδιότητες:

$$\boxed{\begin{aligned} & f(x) \ge 0, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in X(\Omega) = S \subseteq \mathbb{R}^2 \\ & P(x \in B) = \sum_{x \in B} f(x), \quad \forall B \subseteq S \end{aligned}} \qquad \textbf{(4)}$$

απ' όπου προκύπτει ιδιαίτερα: $\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f(x_{1(i)}, x_{2(j)}) = \sum_{(x_1, x_2) \in S} f(x_1, x_2) = 1}$ **(5)**

3. Ονομάζουμε ***κοινή αθροιστική κατανομή πιθανότητας*** της διδιάστατης διακριτής τ.μ. $X=(X_1,X_2)$, τη συνάρτηση,

$$F(x)=F(x_1,x_2)=P(X_1\le x_1,X_2\le x_2)=P(X\le x)=\sum_{X\le x} f(x)=\sum_{X_1\le x_1}\ \sum_{X_2\le x_2} f(x_1,x_2) \qquad \textbf{(6)}$$

όπου, $F(x_1,x_2)\in[0,1],\ -\infty<x_1<\infty,\ -\infty<x_2<\infty$.

4. Η κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X_1 στα πλαίσια της διδιάστατης τ.μ. (X_1,X_2), λέγεται ***περιθωριακή κατανομή πιθανότητας*** της (X_1,X_2) ως προς X_1

και είναι, $f_{X_1}(x_1,x_2)=\sum_{X_2} f(x_1,x_2)=\sum_{j=0}^{\infty} f(x_{1(i)},x_{2(j)})$, **(7)**

και όμοια, $f_{X_2}(x_1,x_2)=\sum_{X_1} f(x_1,x_2)=\sum_{i=0}^{\infty} f(x_{1(i)},x_{2(j)})$ λέγεται *περιθωριακή κατανομή πιθανότητας* της (X_1,X_2) ως προς X_2,

(ενώ για τις μονοδιάστατες τ.μ. X_1,X_2 είναι: $\sum_{i=0}^{\infty} f_{X_1}(x_{1(i)})=1,\quad \sum_{j=0}^{\infty} f_{X_2}(x_{2(j)})=1$).

Ανάλογα μιλάμε για ***περιθωριακή αθροιστική κατανομή*** της $F(x_1,x_2)$ ως προς X_1, δηλ. $F_{X_1}(x_1,x_2)=P(X_1\le x_1),\ -\infty<x_1<\infty$, **(8)**

και όμοια ως προς X_2, δηλ. $F_{X_2}(x_1,x_2)=P(X_2\le x_2),\ -\infty<x_2<\infty$.

5. ***Δεσμευμένη (ή υπό συνθήκη) κατανομή πιθανότητας*** της τ.μ. X_1 δοθέντος ότι $X_2=x_2$, λέγεται η συνάρτηση

$$f_{X_1/X_2}(x_1/x_2)=\frac{f(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)},\quad \text{με } f_{X_2}(x_2)>0, \qquad \textbf{(9)}$$

και ανάλογα ορίζεται η *δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας* f_{X_2/X_1} της τ.μ. X_2.

Παρατηρήσεις

1) Για την απλούστευση των συμβολισμών, ισοδύναμα με τις σχέσεις (4) έχουμε: Μια διδιάστατη διακριτή τ.μ. (X,Y) με τιμές $(x_i,y_j),\ i,j=0,1,\ldots$, από τον ορισμό της ικανοποιεί τις συνθήκες, $f(x_i,y_j)\ge 0$ και $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} f(x_i,y_j)=1$.

Επίσης ισχύει,

$$f(x_i,y_j)=F(x_i,y_j)-F(x_{i-1},y_j)-F(x_i,y_{j-1})+F(x_{i-1},y_{j-1}),\quad (\text{όπου } x_{-1},y_{-1}=-\infty)$$

και $F(x,y)=\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s} f(x_i,y_j),\quad (x_r\le x<x_{r+1},\quad y_s\le y<y_{s+1},\quad r,s=0,1,\ldots)$, **(10)**

ενώ γενικότερα, $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\sum_{x_i\le x}\ \sum_{y_j\le y} f(x_i,y_j),\quad (-\infty<x,y<\infty)$,

όπου η άθροιση περιλαμβάνει όλα τα x_i που είναι μικρότερα ή ίσα μιας συγκεκριμένης τιμής του x, και όλα τα y_j που είναι μικρότερα ή ίσα μιας συγκεκριμένης τιμής του y.

2) Ο όρος *περιθωριακή κατανομή πιθανότητας* $f_X(x_i, y_j)$ μιας διδιάστατης διακριτής συνάρτησης (X, Y) ως προς X, που όπως είδαμε (σχέση (6)) ταυτίζεται με την κατανομή πιθανότητας $f_X(x_i)$ της μονοδιάστατης τ.μ. X, δηλ.

$f_X(x_i, y_j) = \sum_{j=0}^{\infty} f(x_i, y_j) = f_X(x_i), \quad (i = 0, 1, \ldots)$, και όμοια ως προς Y δηλ.

$$f_Y(x_i, y_j) = \sum_{i=0}^{\infty} f(x_i, y_j) = f_Y(y_j), \quad (j = 0, 1, \ldots), \qquad \textbf{(11)}$$

δικαιολογείται από την περιθωριακή θέση τους στον αντίστοιχο Πίνακα που περιγράφει σχηματικά την κατανομή της τ.μ. (X, Y).

Ας σημειωθεί ότι, στον πίνακα αυτόν κάθε στοιχείο της τελευταίας (περιθωριακής) γραμμής είναι το άθροισμα όλων των στοιχείων της αντίστοιχης στήλης, π.χ. $f_Y(y_1)=f(x_0,y_1)+f(x_1,y_1)+\ldots$), καθώς και κάθε στοιχείο της τελευταίας (περιθωριακής) στήλης είναι το άθροισμα όλων των στοιχείων της αντίστοιχης γραμμής. Επίσης το γενικό άθροισμά τους είναι (φυσικά) 1.

f(x,y)						
X\Y	$\mathbf{y_0}$	$\mathbf{y_1}$	…	$\mathbf{y_j}$	…	$\mathbf{f_X(x)}$ περιθ.κατ.(X)
$\mathbf{x_0}$	$f(x_0,y_0)$	$f(x_0,y_1)$	…	$f(x_0,y_j)$	…	$f_x(x_0)$
$\mathbf{x_1}$	$f(x_1,y_0)$	$f(x_1,y_1)$	…	$f(x_1,y_j)$	…	$f_x(x_1)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbf{x_i}$	$f(x_i,y_0)$	$f(x_i,y_1)$	…	$f(x_i,y_j)$	…	$f_x(x_i)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbf{f_Y(y)}$ περιθ.κατ.(Y)	$f_Y(y_0)$	$f_Y(y_1)$	…	$f_Y(y_j)$	…	**1**

Παραδείγματα *(στη διδιάστατη διακριτή τυχαία μεταβλητή)*

1) Έστω το π.τ. της ρίψης ενός νομίσματος 2 φορές, όπου X_1 είναι η τ.μ. που εκφράζει το πλήθος των Κ στο 1ο ρίξιμο και X_2 η τ.μ. που εκφράζει το πλήθος των Κ στο 2ο ρίξιμο. Τότε η τ.μ. $X=(X_1,X_2)$ είναι μια διακριτή διδιάστατη τ.μ.

2) Αν X_1 εκφράζει τον αριθμό των μελών μιας οικογένειας και X_2 εκφράζει τον αριθμό των δωματίων της κατοικίας τους, τότε $X=(X_1,X_2)$ είναι μια διακριτή διδιάστατη τ.μ.

3) Ένα κιβώτιο περιέχει 3 μπαλάκια, αριθμημένα 1,2,3. Παίρνουμε στη τύχη 2 μπαλάκια με επανατοποθέτηση, θεωρώντας Χ τον αριθμό του 1ου και Υ τον αριθμό του 2ου από τα μπαλάκια.
Τότε το ζεύγος (Χ,Υ) είναι μια διδιάστατη διακριτή τυχαία μεταβλητή, που έχει κοινή κατανομή πιθανότητας όπως στον παρακάτω πίνακα (αφού, $\frac{1}{3}\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$):

f(x,y)=

X\Y	**1**	**2**	**3**
1	1/9	1/9	1/9
2	1/9	1/9	1/9
3	1/9	1/9	1/9

4) Αν θεωρήσουμε το προηγούμενο π.τ. αλλά χωρίς επανατοποθέτηση, τότε Χ και Υ είναι επίσης (μονοδιάστατες) διακριτές τ.μ. που παίρνουν πάλι τις τιμές 1,2,3, ενώ το ζεύγος (Χ,Υ) είναι επίσης μια διδιάστατη διακριτή τυχαία μεταβλητή.
Τότε η κοινή κατανομή πιθανότητας της διδιάστατης διακριτής τυχαίας μεταβλητής (Χ,Υ) δίνεται από τον πίνακα,

f(x,y)=

X\Y	**1**	**2**	**3**
1	0	1/6	1/6
2	1/6	0	1/6
3	1/6	1/6	0

αφού $\frac{1}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, ενώ το ενδεχόμενο οι τ.μ. Χ και Υ να παίρνουν ταυτόχρονα την ίδια τιμή είναι αδύνατο (αφού το π.τ. γίνεται χωρίς επανατοποθέτηση).

5) Δύο νομίσματα ρίχνονται ταυτόχρονα και έστω Κ,Γ οι ενδείξεις του ενός νομίσματος και κ,γ οι ενδείξεις του άλλου νομίσματος. Τότε έχουμε 4 ενδεχόμενα: Κκ, Κγ, Γκ, Γγ. Θεωρούμε τις τ.μ., Χ={ο αριθμός των Κ στο 1ο νόμισμα} και Υ={ο αριθμός των κ στο 2ο νόμισμα}, δηλ. Χ=0 σημαίνει ότι στο 1ο νόμισμα έρχεται Γράμματα, Υ=1 σημαίνει ότι στο 2ο νόμισμα έρχεται κεφαλή, κτλ.
Οπότε τα παραπάνω 4 ενδεχόμενα αντιστοιχούν στα διατεταγμένα ζεύγη:
(1,1),(1,0),(0,1),(0,0).

Δηλ. παίρνουμε μια διδιάστατη διακριτή τυχαία μεταβλητή (X,Y) που έχει κοινή κατανομή πιθανότητας f(x,y) και κοινή αθροιστική κατανομή F(x,y), όπως στους ακόλουθους πίνακες:

f(x,y)		
X\Y	**0**	**1**
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4

F(x,y)			
X\Y	**y<0**	**0≤y<1**	**1≤y**
x<0	0	0	0
0≤x<1	0	1/4	1/2
1≤x	0	1/2	1

5) Δύο τ.μ. X,Y, έχουν κοινή κατανομή πιθανότητας f(x,y), που δίνεται από τον πίνακα:

f(x,y)=

X\Y	**1**	**2**	**3**
1	0	1/6	1/6
2	1/6	0	1/6
3	1/6	1/6	0

Να βρεθούν οι περιθωριακές κατανομές πιθανότητας ως προς X και ως προς Y.

Από τις σχέσεις (6δ) γενικά έχουμε, $f_X(x_i, y_j) = \sum_{j=0}^{\infty} f(x_i, y_j) = f_X(x_i), \quad (i = 0, 1, ...)$ και $f_Y(x_i, y_j) = \sum_{i=0}^{\infty} f(x_i, y_j) = f_Y(y_j), \quad (j = 0, 1, ...)$.

Οπότε, το άθροισμα κάθε γραμμής δίνει το αντίστοιχο στοιχείο της περιθωριακής κατανομής πιθανότητας $f_X(x_i)$, π.χ. $f_X(x_{i=3}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 = \frac{2}{6}$,
ενώ το άθροισμα κάθε στήλης δίνει το αντίστοιχο στοιχείο της περιθωριακής κατανομής πιθανότητας $f_Y(y_j)$, π.χ. $f_Y(y_{j=2}) = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$
δηλ. παίρνουμε σχηματικά τον ακόλουθο πίνακα.

X\Y	**1**	**2**	**3**	$f_X(x_i)$
1	0	1/6	1/6	2/6
2	1/6	0	1/6	2/6
3	1/6	1/6	0	2/6
$f_Y(y_j)$	2/6	2/6	2/6	1

5.3. Διδιάστατες Συνεχείς τ.μ.

1. Ονομάζουμε ***συνεχή διδιάστατη τ.μ.*** $X=(X_1,X_2)$ μια συνάρτηση της μορφής (1), όπου καθεμιά από τις X_1,X_2 είναι συνεχής τ.μ. στον ίδιο δειγματοχώρο Ω.

5. Λέμε ***κοινή κατανομή πιθανότητας της συνεχούς διδιάστατης τ.μ.*** $X=(X_1,X_2)$, ή ισοδύναμα των συνεχών τ.μ. X_1 και X_2 επί του ίδιου δειγματοχώρου Ω, τη συνάρτηση,

$$f \equiv P : (x_1,x_2) \in X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^2 \to f(x_1,x_2) = P(x_1 \le X_1 \le x_1 + dx_1,\ x_2 \le X_2 \le x_2 + dx_2) \in [0,1],$$

η οποία έχει τις ιδιότητες:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x_1,x_2) \ge 0, \quad \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ P[(x_1,x_2) \in \Delta)] = \iint\limits_{\Delta} f(x_1,x_2)dx_1dx_2, \quad \forall \Delta \subseteq \mathbb{R}^2 \end{array}} \qquad \textbf{(12)}$$

(όπου Δ ορθογώνιο του $\mathbb{R}^2$ με πλευρές παράλληλες στους άξονες),

και ιδιαίτερα,

$$\boxed{\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = 1} \qquad \textbf{(13)}$$

3. Ονομάζουμε ***κοινή αθροιστική κατανομή πιθανότητας*** της συνεχούς διδιάστατης τ.μ. $X=(X_1,X_2)$, τη συνάρτηση,

$$F(x) = F(x_1,x_2) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f(t_1,t_2)dt_2dt_1 \qquad \textbf{(14)}$$

ενώ αποδεικνύεται ότι ισχύει, $\dfrac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f(x_1,x_2)$

και γενικά για n-διάστατη τ.μ., $\dfrac{\partial^2 F(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1 \partial x_2} = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

4. Η κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X_1 στα πλαίσια της διδιάστατης τ.μ. $X=(X_1,X_2)$, λέγεται ***περιθωριακή κατανομή πιθανότητας*** της X ως προς X_1 και είναι,

$$f_{X_1}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)dx_2\,, \qquad \textbf{(15)}$$

ενώ όμοια ορίζεται και η *περιθωριακή κατανομή πιθανότητας* f_{X_2} της διδιάστατης τ.μ. $X=(X_1,X_2)$ ως προς X_2, δηλ. $f_{X_2}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)dx_1$.

Ανάλογα μιλάμε για ***περιθωριακή αθροιστική κατανομή πιθανότητας*** της $X=(X_1,X_2)$ ως προς X_1, δηλ. $F_{X_1}(x_1,x_2) = P(X_1 \le x_1),\ -\infty < x_1 < \infty$, **(16)**
και όμοια ως προς X_2, δηλ. $F_{X_2}(x_1,x_2) = P(X_2 \le x_2),\ -\infty < x_2 < \infty$.

5. ***Δεσμευμένη (ή υπό συνθήκη) κατανομή πιθανότητας*** της τ.μ. X_1 δοθέντος ότι $X_2 = x_2$, λέγεται η συνάρτηση

$$f_{X_1/X_2}(x_1/x_2)=\frac{f(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)},\quad \text{με } f_{X_2}(x_2)>0 \qquad \textbf{(17)}$$

και ανάλογα ορίζεται η *δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας* f_{X_2/X_1} της τ.μ. X_2 δοθέντος ότι $X_1 = x_1$, δηλ. $f_{X_2/X1}(x_2 / x_1) = \frac{f(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)}$, με $f_{X_1}(x_1) > 0$. **(18)**

Παρατηρήσεις

1) Για μια διδιάστατη συνεχή τ.μ. (X,Y), ισχύει η ιδιότητα:
Αν $x_1 < x_2$ και $y_1 < y_2$, τότε

$$P(x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \qquad \textbf{(19)}$$

2) Οι διδιάστατες τ.μ. (διακριτές και συνεχείς) καθώς και οι σχετικές έννοιές τους (κατανομές, κτλ), επεκτείνονται ανάλογα και στις πολυδιάστατες μεταβλητές. Επίσης, οι μονοδιάστατες βασικές τ.μ. επεκτείνονται στις αντίστοιχες πολυδιάστατες, όπως π.χ. η Διωνυμική στη Πολυωνυμική n-διάστατη τ.μ., είτε η n-διάστατη Υπεργεωμετρική, η πολυδιάστατη Κανονική Κατανομή, κτλ,
(βλ. π.χ. *«Στοιχεία Πιθανοθεωρίας μετ'Εφαρμογών», Ρούσσα Γεωρ., Πάτρα,1973*).

Παραδείγματα *(στη διδιάστατη συνεχή τυχαία μεταβλητή)*

1) Δίνεται μια διδιάστατη συνεχής τ.μ. (X,Y) με κοινή κατανομή πιθανότητας,

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2(x + y - 3xy^2), & \text{όταν } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι περιθωριακές κατανομές πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.

Λύση

Από τη σχέση (10) έχουμε, $f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)dx_2$,

οπότε εδώ:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^1 2(x+y-3xy^2)dy=\left[2xy+y^2-6x\frac{y^3}{3}\right]_0^1=1, & \text{όταν } 0<x<1 \\ 0 & \text{, αλλού} \end{cases}$$

και

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^1 2(x+y-3xy^2)dx=\left[x^2+2yx-3x^2y^2\right]_0^1=1+2y-3y^2, & \text{όταν } 0<y<1 \\ 0 & \text{, αλλού.} \end{cases}$$

2) *Η διδιάστατη κανονική τ.μ.* (X_1, X_2) βρίσκεται ότι έχει κοινή κατανομή πιθανότητας:

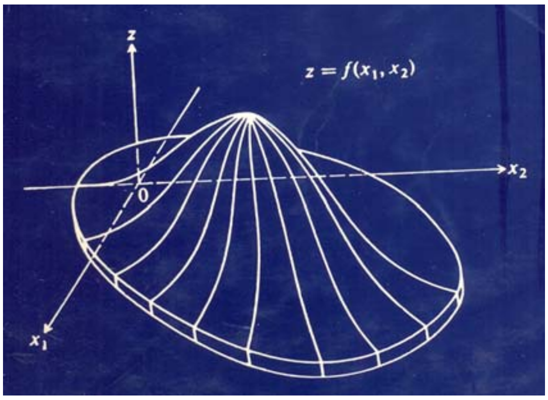
$$f(x_1, x_2) = z = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{\kappa}{2}}, \qquad \textbf{(20)}$$

όπου,

$$\kappa = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

και $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ και $-1 < \rho < 1$

με γράφημα ως ακολούθως.



Γράφημα Διδιάστατης Κανονικής Κατανομής

Παράδειγμα (διδιάστατης κανονικής κατανομής)

Μια βιομηχανία κατασκευάζει κυλινδρικά ηλεκτρονικά εξαρτήματα, όπου θεωρείται ότι το μήκος τους X_1 και η διάμετρός τους X_2 εκφράζεται από τη διδιάστατη κανονική κατανομή, με παραμέτρους:

$\mu_1 = 15\text{cm}$, $\mu_2 = 20\text{mm}$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$ και $\rho = 0$.

Υποθέτοντας ότι ένα εξάρτημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνον όταν το μήκος του είναι 15±0.2 cm και η διάμετρός του 20±0.2 mm, να υπολογιστεί το ποσοστό των μη-ελαττωματικών εξαρτημάτων.

Λύση

Δίνεται ότι ένα εξάρτημα είναι μη-ελαττωματικό όταν, $15-0.2 \le X_1 \le 15+0.2$ και $20 - 0.2 \le X_2 \le 20 + 0.2$.

Ζητείται λοιπόν η πιθανότητα:

$$P(14.8 \le X_1 \le 15.2, \quad 19.8 \le X_2 \le 20.2) = (\text{μετατρέπουμε σε τυπική κανονική})$$

$$= P\left(\frac{14.8-15}{0.2} \le \frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} \le \frac{15.2-15}{0.2}, \quad \frac{19.8-20}{0.2} \le \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} \le \frac{20.2-20}{0.2}\right) =$$

$$= \left(-1 \le \frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} \le 1, \quad -1 \le \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} \le 1\right) = [\Phi(1) - \Phi(-1)]^2 = 0.47.$$

Συνεπώς, τα μη-ελαττωματικά ηλεκτρονικά εξαρτήματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι μόνον 47%.

3) Έστω η διδιάστατη συνεχής τ.μ. (X,Y) που έχει κοινή κατανομή πιθανότητας,

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}xy, & \text{όταν } 0\le x\le 2,\ \ 0\le y\le x\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

Να υπολογιστούν:

α) Η κοινή αθροιστική κατανομή F(x,y).

β) Η πιθανότητα, $P(1<X\le 2,\ \ Y>\frac{1}{4})$.

γ) Οι περιθωριακές κατανομές πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.

Λύση

α) Από τη σχέση (9) έχουμε, $F(x_1,x_2)=P(X_1\le x_1,X_2\le x_2)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f(t_1,t_2)dt_1dt_2$,

δηλ. εδώ, $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$.

Οπότε παίρνοντας όλες τις δυνατές περιπτώσεις, βρίσκουμε:

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & , \text{όταν } x<0,\ \ -\infty<y<\infty\\ \dfrac{y^2(2x^2-y^2)}{16}, & \text{όταν } 0\le x<2,\ \ 0\le y\le x\\ \dfrac{x^2}{16} & , \text{όταν } 0\le x\le 2,\ \ y>x\\ \dfrac{y^2(8-y^2)}{16} & , \text{όταν } x\ge 2,\ \ 0\le y<2\\ 1 & , \text{όταν } x\ge 2,\ \ y\ge 2\end{cases}$$

β) Σύμφωνα με την ιδιότητα (12), είναι: Αν $x_1<x_2$ και $y_1<y_2$, τότε
$P(x_1<X\le x_2,\ \ y_1<Y\le y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$.

Οπότε, χρησιμοποιώντας την κοινή αθροιστική κατανομή F(x,y) , παίρνουμε:

$$P(1<X\le 2,\ Y>\frac{1}{4})=F(2,\infty)-F(2,\frac{1}{4})-F(1,\infty)+F(1,\frac{1}{4})=1-\frac{8-\frac{1}{16}}{16^2}-\frac{1}{16}+\frac{2-\frac{1}{16}}{16^2}=\frac{117}{128}.$$

Εξάλλου, ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$P(1<X\le 2,\ Y>\frac{1}{4})=\int_{1}^{2}\int_{1|4}^{x}\frac{1}{2}xydxdy=\int_{1}^{2}\frac{x}{4}(x^2-\frac{1}{16})dx=\frac{117}{128}.$$

γ) Οι περιθωριακές κατανομές πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$, είναι:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_{0}^{x}\frac{1}{2}xydy=\frac{x^3}{4},\qquad 0\le x\le 2,$$

και

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_{y}^{2}\frac{1}{2}xydx=\frac{y(4-y^2)}{4},\qquad 0\le y\le 2.$$

5.4. Μέση Τιμή Διδιάστατης (Πολυδιάστατης) Τυχαίας Μεταβλητής

1. Έστω μια διδιάστατη τ.μ. (X,Y), είτε ισοδύναμα δύο τ.μ. X και Y στον ίδιο πιθανοχώρο (Ω,F,P), με κοινή κατανομή πιθανότητας $f(x,y)$.

Μέση Τιμή μιας Διδιάστατης τ.μ. (X,Y) ονομάζεται η ποσότητα,

$$\boxed{E(X,Y)=E(Z)=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}(x_i,y_j)f(x_i,y_j) & ,\ \text{αν } (X,Y)\ \text{διακριτή τ.μ}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x,y)f(x,y)dxdy, & \text{αν } (X,Y)\ \text{συνεχής τ.μ.}\end{cases}} \quad \textbf{(21)}$$

(όπου τα εμπλεκόμενα αθροίσματα και ολοκληρώματα, συγκλίνουν κατάλληλα).

Πιο γενικά, αν g είναι μια (μετρήσιμη) συνάρτηση της διδιάστατης τ.μ. $Z=(X,Y)$, τότε η μέση τιμή της τ.μ. $g(X,Y)$ είναι:

$$E[g(X,Y)]=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} g(x_i,y_j)f(x_i,y_j) & ,\ \text{όταν } Z\ \text{διακριτή τ.μ}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy, & \text{όταν } Z\ \text{συνεχής τ.μ.}\end{cases} \quad \textbf{(22)}$$

Ιδιότητες της μέσης τιμής μιας διδιάστατης τ.μ. (X,Y):

α) *Γραμμικότητα*: Αν $g_1(X,Y)$ και $g_2(X,Y)$ είναι τ.μ.-συναρτήσεις της διδιάστατης τ.μ. (X,Y), τότε ισχύει:

$$E[c_1g_1(X,Y)+c_2g_2(X,Y)]=c_1E[g_1(X,Y)]+c_2E[g_2(X,Y)] \quad \textbf{(23)}$$

Ειδικότερα, αν $g_1(X)$ και $g_2(Y)$ είναι τ.μ.-συναρτήσεις των τ.μ. X και Y αντίστοιχα, τότε, $E[c_1g_1(X)+c_2g_2(Y)]=c_1E[g_1(X)]+c_2E[g_2(Y)]$,
καθώς και $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y),\quad a,b\in\mathbb{R}$.

β) Αν X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. και $g(X)$, $h(Y)$ είναι τ.μ.-συναρτήσεις των X και Y αντίστοιχα, τότε: $E[g(X)h(Y)]=E[g(X)]E[h(Y)]$ **(24)**

(Δύο τ.μ. $X=x_i$ και $Y=y_j$ λέγονται ανεξάρτητες, αν και μόνον αν, τα ενδεχόμενα x_i και y_j, για κάθε i και για κάθε j, είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα, δηλ. $f(x_i,y_j)=f_X(x_i)f_Y(y_j)$, βλ. και επόμενη ενότητα).

Γενικότερα, *Μέση Τιμή* της τ.μ. $g(X_1,X_2,...,X_n)$, όπου g είναι μια τ.μ.-συνάρτηση της n-διάστατης τ.μ. $Z=(X_1,X_2,...,X_n)$ με κοινή κατανομή πιθανότητας $f(x_1...x_n)$, ορίζεται η ποσότητα:

$$E[g(X_1,...,X_n)]=E[g(Z)]=\begin{cases}\sum\limits_{x_1}...\sum\limits_{x_n} g(x_1,...,x_n)f(x_1,...,x_n) & ,\ \text{όταν } Z\ \text{διακριτή τ.μ}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x_1,...,x_n)f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n, & \text{όταν } Z\ \text{συνεχής τ.μ.}\end{cases} \quad \textbf{(25)}$$

(όπου τα εμπλεκόμενα αθροίσματα και ολοκληρώματα, συγκλίνουν κατάλληλα).

Ιδιότητες της μέσης τιμής μιας πολυδιάστατης τ.μ. $Z=(X_1,...,X_n)$:

α) $E[c_1g_1(Z)+c_2g_2(Z)]=c_1E[g_1(Z)]+c_2E[g_2(Z)]$,

και γενικότερα (*ιδιότητα της Γραμμικότητας*),

$$E(\sum_{j=1}^{k}[c_jg_j(Z)])=\sum_{j=1}^{k}c_jE[g_j(Z)],\quad \text{όπου } c_1,...,c_k \text{ σταθερές.} \qquad \textbf{(26)}$$

β) $g_1(Z)\geq g_2(Z)\Rightarrow E[g_1(Z)]\geq E[g_2(Z)]$ και ιδιαίτερα, $g(Z)\geq 0\Rightarrow E[g(Z)]\geq 0$.

γ) $E[g(Z)]\leq E|g(Z)|$.

2. ***Διασπορά της διδιάστατης τ.μ.*** $Z=(X_1,X_2)$ με κοινή κατανομή πιθανότητας $f(x_1,x_2)$, είναι η ποσότητα $V(X_1,X_2)=V(Z)=\sigma^2(Z)$, που ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{V(X_1,X_2)=V(Z)=\begin{cases}\sum\limits_{x_1}\sum\limits_{x_2}[(x_1,x_2)-E(x_1,x_2)]^2f(x_1,x_2), & Z \text{ διακριτή τ.μ}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[(x_1,x_2)-E(x_1,x_2)]^2f(x_1,x_2)dx_1dx_2, & Z \text{ συνεχής τ.μ.}\end{cases}} \qquad \textbf{(27)}$$

(όπου τα εμπλεκόμενα αθροίσματα και ολοκληρώματα, συγκλίνουν κατάλληλα).

Γενικότερα, *Διασπορά της πολυδιάστατης τ.μ.* $g(X_1,X_2,...,X_n)$, όπου g είναι μια συνάρτηση της n-διάστατης τ.μ. $Z=(X_1,X_2,...,X_n)$ με κοινή κατανομή πιθανότητας $f(x_1...x_n)$, είναι η ποσότητα $V[g(X_1,X_2,...,X_n)]=V(Z)=\sigma^2(Z)$, που ορίζεται ως εξής:

$$V[g(X_1,...,X_n)]=\begin{cases}\sum\limits_{x_1}...\sum\limits_{x_n}[g(x_1,...,x_n)-E(g(x_1,...,x_n)]^2f(x_1,...,x_n), & Z \text{ διακριτή τ.μ}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty}[g(x_1,...,x_n)-E(g(x_1,...,x_n)]^2f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n, & Z \text{ συνεχής τ.μ.}\end{cases} \qquad \textbf{(28)}$$

(όπου τα εμπλεκόμενα αθροίσματα και ολοκληρώματα, συγκλίνουν κατάλληλα).

Ιδιότητες της διασποράς μιας πολυδιάστατης τ.μ. $Z=(X_1,...,X_n)$:

α) $V[\alpha g(X_1,X_2,...,X_n)]=\sigma^2[\alpha g(Z)]=\alpha^2V[g(Z)],\quad \alpha\in\mathbb{R}$ και

$g(X_1,...,X_n)$ μια νέα τ.μ. που είναι συνάρτηση των τ.μ. $X_1,...,X_n$.

β) $V[g(Z)+\beta]=V[g(Z)],\quad \beta\in\mathbb{R}$.

γ) $V[\alpha g(Z)+\beta]=\alpha^2V[g(Z)],\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

δ) $V(X_1,...,X_n)=V[(Z)]=E[(Z)]^2-(E[(Z)])^2$. **(29)**

ε) Ως προς τη διασπορά της τ.μ. X και Y μιας διδιάστατης συνεχούς τ.μ. (X,Y), ισχύει (και αντίστοιχα με αθροίσματα για μια διακριτή διδιάστατη τ.μ.):

$$V_{X,Y}(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^2f(x,y)dxdy, \text{ και}$$

$$V_{X,Y}(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_Y)^2f(x,y)dxdy, \qquad \text{όπου } \mu_X=E(X),\ \mu_Y=E(Y), \qquad \textbf{(30)}$$

5.5. Ανεξάρτητες Τυχαίες Μεταβλητές

Η έννοια της (στοχαστικής) ανεξαρτησίας των τ.μ. παίζει σημαντικό ρόλο στην Πιθανοθεωρία και στη Στατιστική, αναφέρεται όχι μόνο σε δύο αλλά και σε περισσότερες τ.μ. και αποτελεί γενίκευση της έννοιας των ανεξάρτητων ενδεχομένων και ανεξάρτητων πειραμάτων τύχης.

Σχετικά ισχύουν τα εξής:
1. Οι τ.μ. $X_1, X_2, ..., X_n$, λέγονται *(στοχαστικά ή πιθανοθεωρητικά)* ***ανεξάρτητες***, αν για κάθε n-άδα ενδεχομένων-υποσυνόλων $B_1, B_2, ..., B_n$ του $\mathbb{R}$, ισχύει η σχέση:
$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, ..., X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1)P(X_2 \in B_2)...P(X_n \in B_n), \qquad \textbf{(31)}$$
είτε ισοδύναμα όταν ισχύει,

$$P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, ..., X_n \le x_n) = P(X_1 \le x_1)P(X_2 \le x_2)...P(X_n \le x_n), \qquad \textbf{(32)}$$
για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$.
Εξάλλου, ***Εξαρτημένες*** λέγονται οι τ.μ. που δεν είναι ανεξάρτητες.

2. ***Κριτήρια Ανεξαρτησίας των τ.μ.*****:**
Οι τ.μ. $X_1, X_2, ..., X_n$, είναι ανεξάρτητες, αν για κάθε n-άδα $x_1, x_2, ..., x_n$, ισχύει μια από τις σχέσεις:
$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)...f_{X_n}(x_n), \qquad \textbf{(33)}$$
είτε
$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)...F_{X_n}(x_n). \qquad \textbf{(34)}$$

3. Αν δύο τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, δηλ.
$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$, με αντίστοιχη πεπερασμένη μέση τιμή E(X) και E(Y),
τότε η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. X+Y είναι,
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{και} \quad V(X+Y)=V(X)+V(Y), \qquad \textbf{(35)}$$
ενώ η μέση τιμή της τ.μ. XY είναι, E(XY)=E(X)E(Y).

4. Γενικότερα: Αν οι τ.μ. $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητες, τότε για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $g_1, g_2, ..., g_n$, οι τ.μ. $Y_1 = g_1(X_1), Y_2 = g_2(X_2), ..., Y_n = g_n(X_n)$, είναι επίσης ανεξάρτητες, για τις οποίες ισχύει:

α) $E(X_1X_2...X_n) = E(X_1)E(X_2)...E(X_n)$, **(36)**
και γενικότερα
$$E(g_1(X_1)g_2(X_2)...g_n(X_n)) = Eg_1(X_1)Eg_2(X_2)...Eg_n(X_n),$$

β) $V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$, **(37)**
και γενικότερα
$$V[g_1(X_1) + g_2(X_2) + ... + g_n(X_n)] = V[g_1(X_1)] + V[g_2(X_2)] + ... + V[g_n(X_n)].$$

5.6. Συνδιασπορά - Συντελεστής (γραμμικής) Συσχέτισης δύο τ. μ.

Έστω δύο τ.μ. X και Y, με $E(X)=\mu_X$, $E(Y)=\mu_Y$ και $E(XY)=\mu$, όπου $\mu_X,\mu_Y,\mu \in \mathbb{R}$, (το γινόμενο XY=Z είναι η τ.μ. που παίρνει τιμές xy=z).

1. ***Συνδιασπορά*** ή ***Συνδιακύμανση*** *(Covariance)* ***δύο τ.μ. X και Y***, ορίζεται:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]\\ &= E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=\mu-\mu_X\mu_Y\end{aligned}} \quad \textbf{(38)}$$

Ιδιότητες Συνδιασποράς **(39)**

α) Cov(aX+b, cY+d)=acCov(X,Y), $(a,b,c,d\in\mathbb{R},\ \text{σταθερές})$

β) Cov(X,X)=V(X)

γ) $-\sigma(X)\sigma(Y) \le \mathrm{Cov}(X,Y) \le \sigma(X)\sigma(Y)$, *(ανισότητα Schwarz)*

δ) Αν οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες τότε ισχύει: $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

(Το αντίστροφο δεν ισχύει, π.χ. Αν X τ.μ. ομοιόμορφα κατανεμημένη στο [-1,1] και $Y=X^2$, τότε $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(X^3)-E(X)E(X^2)=0$, ενώ οι X και Y διαπιστώνεται ότι δεν είναι ανεξάρτητες).

Σημείωση:

Η φυσική ερμηνεία της συνδιασποράς Cov(X,Y) είναι ότι αποτελεί ένα μέτρο για το αν υπάρχει και σε τι βαθμό γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών X και Y.

Έτσι αν η συνδιασπορά Cov(X,Y) είναι μικρή ή μηδέν, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μικρή ή καθόλου γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών X και Y, (αλλά αυτό δεν αποκλείει ότι μπορεί να υπάρχει μια άλλη μη-γραμμική σχέση μεταξύ τους, όπως π.χ. καμπυλοειδής, παραβολική, ελλειψοειδής, καμπανόσχημη ή γκαουσιανή, κτλ).

Αν η συνδιασπορά είναι μεγάλη και θετική, σημαίνει ότι οι τιμές των X και Y είναι και οι δύο μεγάλες ή και οι δύο μικρές, σε σχέση με τις μέσες τιμές τους. Αν η συνδιασπορά είναι μεγάλη και αρνητική, αυτό σημαίνει ότι οι τιμές της X είναι μεγάλες και οι τιμές της Y είναι μικρές (ή αντίστροφα), σε σχέση με τις μέσες τιμές τους

Συντελεστής Συσχέτισης (*coefficient of correlation*) ***ρ δύο τ.μ. X και Y***, είναι:

$$\boxed{\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}} \quad \textbf{(40)}$$

Ιδιότητες Συντελεστή Συσχέτισης **(41)**

α) Είναι: $-1\le\rho\le1$ και $\rho(aX+b,cY+d)=\begin{cases}\rho(X,Y), & \text{αν } ac>0\\ -\rho(X,Y), & \text{αν } ac<0\end{cases}$ $(a,b,c,d=\text{σταθερές})$

β) Το γράφημα (νέφος) των σημείων (x_i,y_j) είναι μια ευθεία, αν και μόνον αν:
ρ=1 (οπότε λέμε ότι οι τ.μ. X και Y είναι ***θετικά πλήρως συσχετισμένες***), είτε
ρ=-1 (οπότε λέμε ότι οι τ.μ. X και Y είναι ***αρνητικά πλήρως συσχετισμένες***).

γ) Αν $0<\rho<1$, τότε οι τ.μ. X και Y είναι *θετικά συσχετισμένες*, ενώ
αν $-1<\rho<0$, τότε οι τ.μ. X και Y είναι *αρνητικά συσχετισμένες*.

δ) Αν ρ(X,Y)=0, τότε οι X,Y λέγονται ***ασυσχέτιστες*** *(γραμμικά)*. Από τον ορισμό του ρ, αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. τότε $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$, οπότε και ρ=0. Συνεπώς οι ανεξάρτητες τ.μ. είναι και ασυσχέτιστες, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει, (μοναδική εξαίρεση είναι η διδιάστατη κανονική κατανομή).

Παρατηρήσεις

1) Καλύτερος δείκτης της (γραμμικής) συσχέτισης δύο τ.μ. X και Y είναι μάλλον ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης αυτών ρ(X,Y), που είναι ένα μέτρο ανεξάρτητο μονάδων, παρά η συνδιασπορά τους Cov(X,Y).
Το κύριο μειονέκτημα της συνδιασποράς-συνδιακύμανσης βρίσκεται στο ότι όταν κάνουμε γραμμικό μετασχηματισμό στις τ.μ. X,Y (ή αλλάζοντας την κλίμακα ή τις μονάδες μέτρησής τους) τότε η Cov(X,Y) μεταβάλλεται, αφού ως γνωστόν ισχύει Cov(aX+b,cY+d)=acCov(X,Y),
ενώ το μέτρο του συντελεστή συσχέτισης δεν επηρεάζεται από γραμμικούς μετασχηματισμούς, αφού γενικά ισχύει ρ(aX+b, cY+d)=±ρ (X,Y).

2) Στις εφαρμογές συχνά η συνδιασπορά Cov(X,Y) δύο τ.μ. X και Y υπεισέρχεται στον υπολογισμό της διασποράς τους V(X) και V(Y) καθώς και διάφορων γραμμικών συνδυασμών των X και Y.

Σχετικά ισχύει:

$$V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)+2abCov(X,Y)\,, \qquad \textbf{(42)}$$

(όπου a,b σταθερές)

ενώ αν επιπλέον οι X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ., τότε ισχύει:

$$V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y). \qquad \textbf{(43)}$$

3) Συνοψίζοντας σχετικά με τον συντελεστή (γραμμικής) συσχέτισης, ισχύει:

α) Αν ρ(X,Y)=0, τότε οι τ.μ. X,Y είναι (γραμμικά) ασυσχέτιστες.

β) Αν ρ>0, τότε οι τ.μ. X,Y είναι θετικά συσχετισμένες, δηλ. όσο αυξάνονται οι τιμές της τ.μ. X τόσο αυξάνονται και οι τιμές της Y, π.χ. όσο αυξάνει το ύψος (X) των ανθρώπων αυξάνει και το βάρος τους (Y).

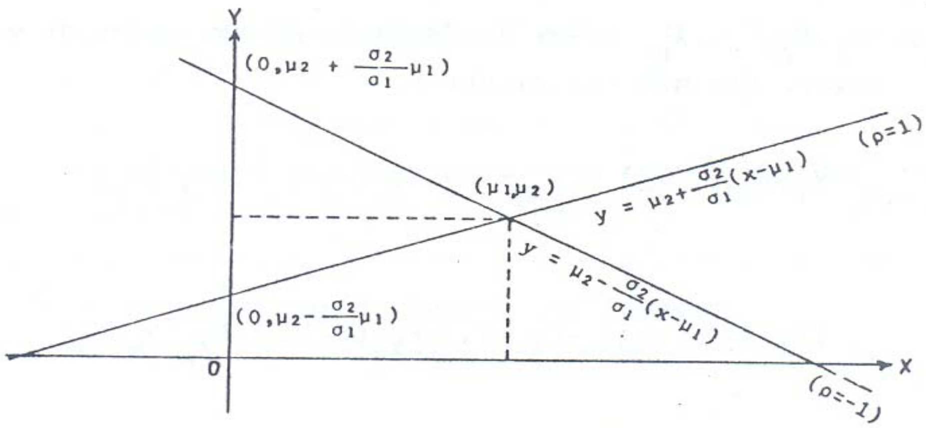
γ) Αν ρ<0, τότε οι τ.μ. X,Y είναι αρνητικά συσχετισμένες, δηλ. όσο αυξάνονται οι τιμές της τ.μ. X τόσο ελαττώνονται και οι τιμές της Y, π.χ. όσο αυξάνει ο ρυθμός επενδύσεων (X) τόσο ελαττώνεται και η ανεργία (Y).

δ) Αν ρ=+1, ή ρ=-1, τότε υπάρχει πλήρης γραμμική συσχέτιση μεταξύ των τ.μ. X και Y, δηλ. Y=aX+b, $(a, b \in \mathbb{R})$, και αντίστροφα (δηλ. αν Y=aX+b τότε ρ=±1) .
Ειδικότερα:

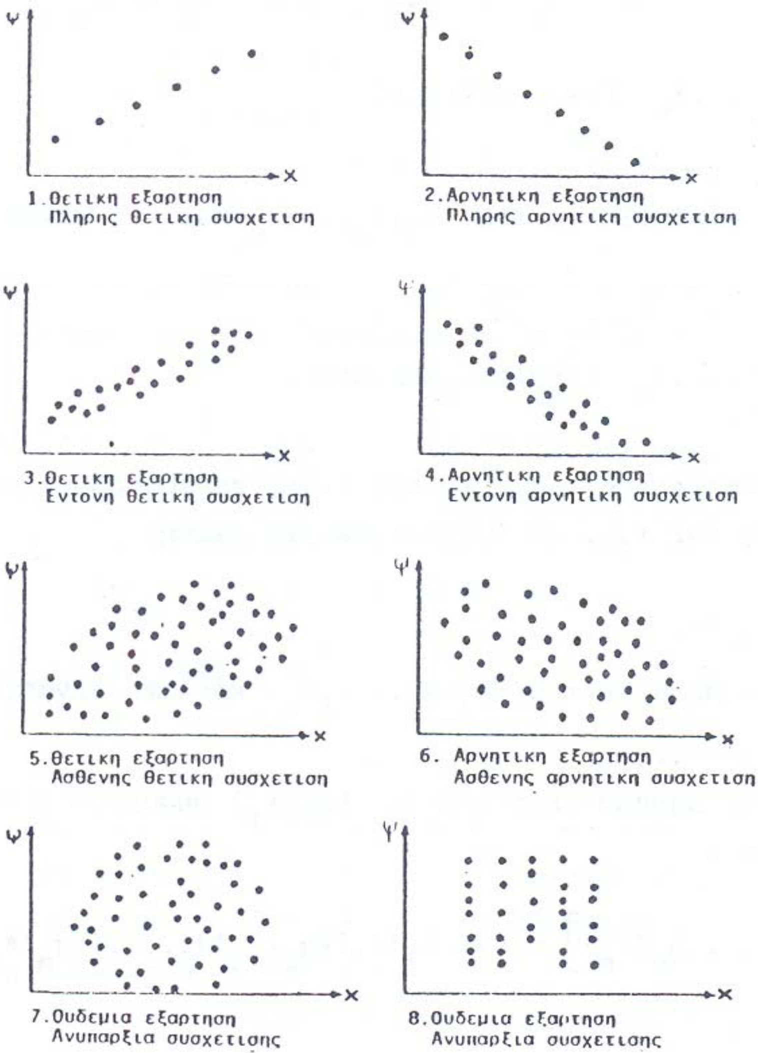
-Αν ρ=1, τότε $Y = \dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}X + (\mu_Y - \dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X)$, **(44)**

-Αν ρ=-1, τότε $Y = -\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}X + (\mu_Y - \dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X)$.

Τέλος, σχετικά με τα γραφήματα του συντελεστή (γραμμικής) συσχέτισης ρ και της γραμμικής εξάρτησης των τ.μ. X και Y, βλ. επόμενα σχήματα (όπου μ_1,σ_1 και μ_2,σ_2, είναι η μέση τιμή και η απόκλιση των τ.μ. X και Y, αντίστοιχα).



"Συντελεστης συσχετισης ρ και γραμμικη εξαρτηση των τ.μ. X,Y."



"Συσχετιση των τ.μ. X,Y."

5.7. Δεσμευμένη μέση τιμή - Δεσμευμένη διασπορά πολυδιάστατης τ.μ.

Έστω (χάριν απλούστευσης) μια διδιάστατη τ.μ. (X,Y).

Ονομάζουμε ***δεσμευμένη μέση τιμή της* X *δεδομένου ότι* Y=y**, την ποσότητα που ορίζεται ως εξής:

$$E(X/y)=\mu_{X/Y}(y)=\begin{cases}\sum\limits_i x_i f_{X/Y}(x_i/y_j), & \text{αν } (X,Y) \text{ διακριτή τ.μ.}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X/Y}(x/y)dx, & \text{αν } (X,Y) \text{ συνεχής τ.μ}\end{cases} \qquad \textbf{(45)}$$

Όμοια, ονομάζουμε ***δεσμευμένη μέση τιμή της* Y *δεδομένου ότι* X=x**, την ποσότητα που ορίζεται ως εξής:

$$E(Y/x)=\mu_{Y/X}(x)=\begin{cases}\sum\limits_j y_j f_{Y/X}(y_j/x_i), & \text{αν } (X,Y) \text{ διακριτή τ.μ.}\\ \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y/X}(y/x)dy, & \text{αν } (X,Y) \text{ συνεχής τ.μ}\end{cases} \qquad \textbf{(46)}$$

Ανάλογα, ορίζεται η ***δεσμευμένη διασπορά (διακύμανση) της* X *δεδομένου ότι* Y=y**, ως εξής:

$$V(X/y)=\sigma^2{}_{X/Y}(y)=E(X^2/Y)-E^2(X/Y)=E[(X-\mu_{X/Y}(y))^2/y], \qquad \textbf{(47)}$$

καθώς και η ***δεσμευμένη διασπορά (διακύμανση) της* Y *δεδομένου ότι* X=x**,

$$V(Y/x)=\sigma^2{}_{Y/X}(y)=E(Y^2/X)-E^2(Y/X)=E[(Y-\mu_{Y/X}(x))^2/x]. \qquad \textbf{(48)}$$

Παραδείγματα *(στη δεσμευμένη μέση τιμή-διασπορά διδιάστατης τ.μ.)*

1) Έστω ότι οι τ.μ. X, Y, έχουν κοινή κατανομή πιθανότητας,

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & \text{όταν } 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

Να υπολογιστούν:

i) $E(X/y)$, ii) $V(X/y)$.

Λύση

i) $E(X/y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X/Y}(x/y)dx=\int_0^y x\frac{2x}{y^2}dx=[\frac{2x^3}{3y^2}]_0^y=\frac{2y}{3}, \quad (0\le y\le 1)$.

ii) $V(X/y)=\sigma^2{}_{X/Y}(y)=E(X^2/Y)-E^2(X/Y)$,

όπου,

$$E(X^2/Y)=\int_0^y x^2\frac{2x}{y^2}dx=[\frac{2x^4}{4y^2}]_0^y=\frac{y^2}{2}.$$

Οπότε:

$$V(X/y)=E(X^2/Y)-E^2(X/Y)=\frac{y^2}{2}-(\frac{2y}{3})^2=\frac{y^2}{18}, \quad (0\le y\le 1).$$

2) Έστω ότι οι διακριτές τ.μ. X,Y, έχουν κοινή κατανομή πιθανότητας f(x,y) που δίνεται από τον Πίνακα,

f(x,y)			
Y\X	**6**	**8**	**10**
1	0.2	0	0.2
2	0	0.2	0
3	0.2	0	0.2

Να υπολογιστούν:

i) $E(X/y=3)$, ii) $V(X/y=3)$.

Λύση

i) $E(X/y=3)=\sum_i x_i f_{X/Y}(x_i/y=3), \ (i=1,2,3)$, όπου

$$f_{X/Y}(x_i/y=3)=\frac{f(x_i,3)}{f_Y(3)}, \ (i=1,2,3) \quad \text{και} \quad f_Y(3)=0.2+0+0.2=0.4 .$$

Οπότε, $f_{X/Y}(x_1/y=3)=\frac{f(x_1,3)}{f_Y(3)}=\frac{0.2}{0.4}=0.5$,

$$f_{X/Y}(x_2/y_j=3)=\frac{f(x_2,3)}{f_Y(3)}=\frac{0}{0.4}=0$$

και

$$f_{X/Y}(x_3 / y_j = 3) = \frac{f(x_3, 3)}{f_Y(3)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5\,,$$

δηλ. συνοπτικά παίρνουμε τον πίνακα:

X	**6**	**8**	**10**
$f_{X/Y}(x_i / y_j = 3)$	0.5	0	0.5

Συνεπώς,

$$E(X / y = 3) = \sum_i x_i f_{X/Y}(x_i / y = 3) = 6(0.5) + 8(0) + 10(0.5) = 8\,.$$

ii) Είναι, $V(X / y) = \sigma^2{}_{X/Y}(y) = E(X^2 / Y) - E^2(X / Y)$
οπότε,

$$V(X / y = 3) = E(X^2 / Y = 3) - E^2(X / Y = 3)\,,$$

όπου

$$E(X^2 / Y = 3) = \sum_i (x_i)^2 f_{X/Y}(x_i / y = 3) = 6^2(0.5) + 8^2(0) + 10^2(0.5) = 18 + 50 = 68\,.$$

Συνεπώς,

$$V(X / y = 3) = E(X^2 / Y = 3) - E^2(X / Y = 3) = 68 - 64 = 4\,.$$

5.8. Ευθεία Παλινδρόμησης - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Είδαμε σχετικά με τον συντελεστή (γραμμικής) συσχέτισης, ότι ισχύει:

α) Αν ρ(X,Y)=0, τότε οι τ.μ. X,Y είναι (γραμμικά) ασυσχέτιστες.

β) Αν ρ>0, τότε οι τ.μ. X,Y είναι θετικά συσχετισμένες, δηλ. όσο αυξάνονται οι τιμές της τ.μ. X τόσο αυξάνονται και οι τιμές της Y, π.χ. όσο αυξάνει το ύψος (X) των ανθρώπων αυξάνει και το βάρος τους (Y).

γ) Αν ρ<0, τότε οι τ.μ. X,Y είναι αρνητικά συσχετισμένες, δηλ. όσο αυξάνονται οι τιμές της τ.μ. X τόσο ελαττώνονται και οι τιμές της Y, π.χ. όσο αυξάνει ο ρυθμός επενδύσεων (X) τόσο ελαττώνεται και η ανεργία (Y).

δ) Αν ρ=+1, ή ρ=-1, τότε υπάρχει πλήρης γραμμική συσχέτιση μεταξύ των τ.μ. X και Y, δηλ. ισχύει Y=αX+β, ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), και αντίστροφα.

Στην περίπτωση αυτή, αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι ακόλουθες γραμμικές σχέσεις:

- Αν ρ=1, τότε $Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} X + (\mu_Y - \mu_X \frac{\sigma_Y}{\sigma_X})$, **(31)**

- Αν ρ=-1, τότε $Y = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} X + (\mu_Y - \mu_X \frac{\sigma_Y}{\sigma_X})$. **(32)**

Στη γενική περίπτωση όπου $\rho \neq \pm 1$ δηλ. $-1 < \rho < 1$, προφανώς η πλήρης γραμμική σχέση μεταξύ των X,Y δεν ισχύει, αλλά συχνά παρουσιάζει ενδιαφέρον ο προσδιορισμός μιας (γραμμικής) προσέγγισης της τ.μ. Y συναρτήσει της τ.μ. X.
Προφανώς στην προσεγγιστική αυτή διαδικασία γίνεται κάποιο σφάλμα, έστω u, που θεωρείται ως μια τ.μ. με μέση τιμή E(u)=0, δηλ. έχουμε, $Y = aX + b + u$.

Για να είναι όσο το δυνατόν καλύτερη αυτή η προσέγγιση (δηλ. το σφάλμα u να είναι ελάχιστο), συνεπάγεται ότι πρέπει να ελαχιστοποιηθεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, που σημαίνει να υπολογιστούν οι συντελεστές $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ώστε η ποσότητα $E(u^2) = E[(Y - \hat{\alpha}X - \hat{\beta})^2]$ να ελαχιστοποιείται.

Η προσεγγιστική αυτή διαδικασία λέγεται ***Μέθοδος ή Αρχή Ελαχίστων Τετραγώνων*** *(least squares method)*.

Αποδεικνύεται ότι οι τιμές των $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$, έτσι ώστε να προσδιορίζεται η βέλτιστη ***ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης***, $\boxed{y = \hat{\alpha}x + \hat{\beta}}$, δίνονται γενικά από τις σχέσεις:

$$\boxed{\hat{\alpha} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}}$$

και $$\boxed{\hat{\beta} = \mu_Y - \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \mu_X} \qquad \textbf{(33)}$$

Πιο συγκεκριμένα, σχετικά έχουμε:

Έστω μια διδιάστατη τ.μ. (X,Y) με πεπερασμένες ροπές 2ης τάξης $E(X^2)$, $E(Y^2)$.

Η ευθεία,

$$\boxed{y = (\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X})x + (\mu_Y - \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X)}, \qquad \textbf{(34)}$$

λέγεται ***ευθεία (γραμμικής) παλινδρόμησης*** *(regression line)* ***της τ.μ.*** **Y** ***στην*** **X.**

Αντίστοιχα η ευθεία,

$$\boxed{x = (\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y})y + \mu_X - \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\mu_Y)}, \qquad \textbf{(35)}$$

λέγεται ***ευθεία (γραμμικής) παλινδρόμησης της τ.μ.*** **X** ***στην*** **Y.**

Επίσης με βάση τα $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$, για το μέσο τετραγωνικό σφάλμα έχουμε,
$E(u^2) = E[(Y - \hat{\alpha}X - \hat{\beta})^2] = \sigma_Y^2(1-\rho^2)$, που λέγεται *υπόλοιπο διασποράς,*
και αντίστοιχα, $E(u^2) = E[(X - \hat{\alpha}Y - \hat{\beta})^2] = \sigma_X^2(1-\rho^2)$.

Παραδείγματα *(Γραμμικής Παλινδρόμησης μέσω των Ελαχίστων Τετραγώνων)*

1) Έστω X και Y δύο μεταβλητές, με τιμές π.χ. x_i=επιφάνεια διαμερίσματος, y_i=τιμή διαμερίσματος.
Τότε σχετικά με τη γραμμική συσχέτιση των X και Y, (δηλ. όταν το νέφος των σημείων (x_i, y_i), i=1,...,n, προσεγγίζεται γεωμετρικά από μια ευθεία γραμμή ε), ισχύει ο τύπος:

$$y_i = ax_i + b + u_i\ , \qquad (I)$$

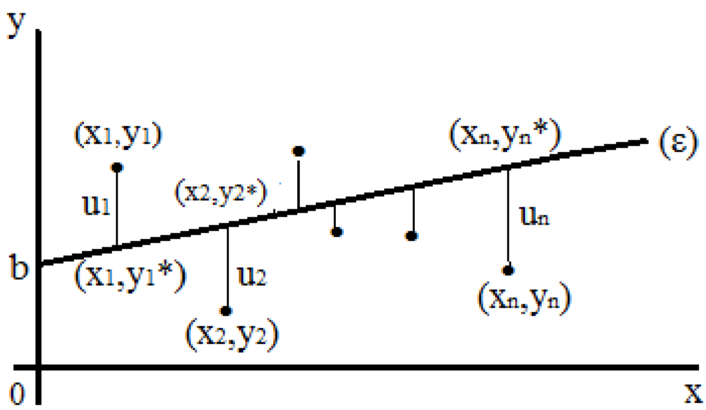
όπου u_i είναι μια μεταβλητή σφάλματος-απόκλισης.

Γενικά η συσχέτιση των μεταβλητών X και Y μπορεί να μην είναι γραμμική (δηλ. να μην προσεγγίζεται γεωμετρικά καλύτερα από μια ευθεία γραμμή), αλλά από μια οποιαδήποτε άλλη ***καμπύλη παλινδρόμησης*** ***(****regression curve),* π.χ. παραβολική ($y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$), ή λογαριθμική ($\log y=\alpha x+\beta$), ή εκθετική, κλπ, που προσαρμόζεται βέλτιστα στο νέφος των σημείων, δηλ. από μια οποιαδήποτε άλλη μαθηματική (μη-γραμμική) σχέση με το ελάχιστο σφάλμα u_i.

Οι συντελεστές a και b της γραμμικής συσχέτισης (I), προσδιορίζονται μέσω ***της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων***, δηλ. επιλεγμένων έτσι ώστε να είναι ελάχιστο (minimum) το άθροισμα,

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i)^2 , \qquad \text{(II)}$$

όπου $u_i = \left| y_i - y_i^* \right|$ είναι οι (οριζόντιες) αποκλίσεις μεταξύ των τιμών y_i των παρατηρήσεών μας και των τιμών y_i^* της ευθείας (ε), που αντιστοιχούν στις x_i, (βλ. ακόλουθο Σχήμα).



Σχήμα: *Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων για γραμμική συσχέτιση.*

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

Έστω 10 διαμερίσματα, με επιφάνεια (σε m^2),

$x_i = \{28,50,55,60,48,35,86,65,32,52\}$, i=1,…, n=10,

και με αντίστοιχη τιμή (σε χλδ. €),

$y_i = \{130,280,268,320,250,250,350,300,155,245\}$.

Τότε η παλινδρομική ευθεία (ε) των ελαχίστων τετραγώνων βρίσκεται ότι δίνεται από την εξίσωση: y*=3,52x+74,70
και διέρχεται από το σημείο $(\overline{x}, \overline{y})$ -«μέση τιμή ή κέντρο βάρους», με συντεταγμένες: $\overline{x} = 51{,}1$ και $\overline{y} = 254{,}8$.

Πιο αναλυτικά, είναι:
Οι συντελεστές a και b της παλινδρομικής ευθείας (I) που θα προσεγγίζει «βέλτιστα» το νέφος των σημείων (x_i, y_i), υπολογίζονται από τη σχέση (II) ως εξής:

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i)^2 = \min \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\left| y_i - y_i^* \right|)^2 = \min \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax - b)^2 = S(a, b) = \min$$

δηλ. αναζητούμε το ελάχιστο (min) της διμεταβλητής συνάρτησης S (ως προς ανεξάρτητες μεταβλητές τα a,b), οπότε (κατά τα γνωστά από τα ακρότατα διμεταβλητών συναρτήσεων) τα πιθανά ακρότατα θα είναι τα σημεία-λύσεις του συστήματος:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= -2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - ax_i - b) \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{n(\Sigma y_i)(\Sigma x_i^2) - (\Sigma x_i)(\Sigma x_i y_i)}{n(\Sigma x_i^2) - (\Sigma x_i)^2} \\ \hat{b} &= \frac{n(\Sigma x_i y_i) - (\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{n(\Sigma x_i^2) - (\Sigma x_i)^2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

(οι ανωτέρω εξισώσεις λέγονται και ***Κανονικές Εξισώσεις***).

Επίσης, ορίζουμε σχετικά τον λόγο: $$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(u_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2} = 1 - \rho^2 \leq 1 \ , \qquad \text{(IV)}$$

όπου ρ= (ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης),

ενώ στο παρόν παραπάνω παράδειγμα βρίσκουμε ότι είναι, $\rho = 0{,}89$.

Συνοψίζοντας, σχετικά με τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης, έχουμε:

Ο ρ είναι καθαρός αριθμός (δείκτης), με πρόσημο αυτό της κλίσης της (ε) και $-1 \leq \rho \leq 1$, που εκφράζει το μέτρο της έντασης της (γραμμικής) αλληλεξάρτησης των δύο μεταβλητών x και y.

Αν $\rho = 0$, η ευθεία (των ελαχίστων τετραγώνων) είναι οριζόντια, δηλ. η τιμή του x δεν παίζει κανένα ρόλο για τη πρόβλεψη του y (πλήρης ανεξαρτησία των x και y).

Αν ρ= ± 1, τότε η πρόβλεψη είναι τέλεια , διότι οι αποκλίσεις-σφάλματα είναι μηδέν.

Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης ρ είναι τόσο μεγαλύτερος (σε απόλυτη τιμή) όσο η τιμή της μιας μεταβλητής επηρεάζει την τιμή της άλλης μεταβλητής –με την προϋπόθεση ότι η σχέση μεταξύ τους είναι γραμμική (και όχι κάποια άλλη, π.χ. παραβολική, ελλειψοειδής , κλπ).

Άρα:

$$[\rho_{(x,y)} \simeq -1] \Rightarrow [\text{ισχυρή συσχέτιση, αρνητική (διαφωνία)}],$$
$$[\rho_{(x,y)} \simeq +1] \Rightarrow [\text{ισχυρή συσχέτιση, θετική (συμφωνία)}],$$
$$[\rho_{(x,y)} \simeq 0] \Rightarrow [x, y, \text{(γραμμικά) ασυσχέτιστες}].$$

Εξάλλου όπως γνωρίζουμε, ορίζεται η συνδιασπορά ή συνδιακύμανση, μεταξύ δύο διακριτών μεταβλητών X και Y, ως εξής:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{(x,y)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right), \qquad \text{(V)}$$

είτε, όταν τα x_i είναι σταθμισμένα με μάζα m_i :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right), \qquad \text{(VI)}$$

ενώ ισχύει ότι:

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}\ , \qquad \text{(VII)}$$

όπου σ_x και σ_y είναι οι τυπικές αποκλίσεις των X και Y, αντίστοιχα.

2) Έστω η διδιάστατη τ.μ. (X,Y) με από κοινού κατανομή πιθανότητας,

$$f(x,y)=\frac{1}{2}xy, \quad (0\le x\le 2, \quad 0\le y\le x).$$

Να προσδιοριστεί η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της τ.μ. X στην Y.

Λύση

Ζητείται η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης, $x=\hat{\alpha}y+\hat{\beta}$, όπου

$$\hat{\alpha}=\rho(X,Y)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \qquad \text{και} \qquad \hat{\beta}=\mu_Y-\rho(X,Y)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X.$$

Υπολογίζουμε τις αναγκαίες ποσότητες, για τον προσδιορισμό των $\hat{\alpha},\hat{\beta}$:

► $f_X(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^x \frac{1}{2}xydy=\frac{1}{2}x\int_0^x ydy=\frac{1}{2}x[\frac{y^2}{2}]_0^x=$

$=\frac{1}{2}x[\frac{x^2}{2}-0]=\frac{x^3}{4}, \quad (0\le x\le 2).$

► $f_Y(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_y^2 \frac{1}{2}xydx=\frac{1}{2}y\int_y^2 xdx=\frac{1}{2}y[\frac{x^2}{2}]_y^2=$

$=\frac{1}{2}y[\frac{2^2}{2}-\frac{y^2}{2}]=y-\frac{y^3}{4}, \quad (0\le y\le 2).$

► $E(X)=\mu_X=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x,y)dx=\int_0^2 x\frac{x^3}{4}dx=[\frac{x^5}{20}]_0^2=\frac{8}{5}=1.60$

► $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f_X(x,y)dx=\int_0^2 x^2\frac{x^3}{4}dx=[\frac{x^6}{(4)(6)}]_0^2=\frac{64}{24}=2.66$

► $V(X)=\sigma^2(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2.66-(1.60)^2=2.66-2.56=0.10$

► $\sigma_X=\sigma(X)=+\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.10}=0.32$

► $E(Y)=\mu_Y=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(x,y)dy=\int_0^2 y(y-\frac{y^3}{4})dy=[\frac{y^3}{3}-\frac{y^5}{20}]_0^2=\frac{8}{3}-\frac{8}{5}=1.06$

► $E(Y^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(x,y)dy=\int\limits_0^2 y^2(y-\frac{y^3}{4})dy=[\frac{y^4}{4}-\frac{y^6}{24}]_0^2=\frac{16}{4}-\frac{64}{24}=\frac{4}{3}=1.33$

► $V(Y)=\sigma^2(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=1.33-(1.06)^2=1.33-1.12=0.21$

► $\sigma_Y=\sigma(Y)=+\sqrt{V(Y)}=\sqrt{0.21}=0.45$

► $E(XY)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\int\limits_0^2[\int\limits_0^x xy(\frac{xy}{2})dy]dx=\int\limits_0^2 \frac{x^2}{2}[\frac{y^3}{3}]_0^x=$

$=\int\limits_0^2 \frac{x^5}{6}dx=[\frac{x^6}{6(6)}]_0^2=\frac{64}{36}=1.78$

Οπότε:

► $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1.78-(1.60)(1.06)=1.78-1.70=0.08$

► $\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{0.08}{(0.32)(0.45)}=\frac{0.08}{0.144}=0.55$

► $\hat{\alpha}=\rho(X,Y)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}=0.55\frac{0.45}{0.32}=0.77$

► $\hat{\beta}=\mu_Y-\rho(X,Y)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X=1.06-0.55\frac{0.45}{0.32}1.60=1.06-1.24=-0.18$.

Συνεπώς, η ζητούμενη ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης, είναι:

$$x=\hat{\alpha}y+\hat{\beta}\Leftrightarrow x=0.77y-0.18 \ .$$

3) Έστω (X,Y) μια διακριτή διδιάστατη τ.μ. με κατανομή πιθανότητας,

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{x+y}{21}, \quad (\text{όπου} \quad x=1,2, \quad \text{και} \quad y=1,2,3).$$

Να υπολογιστεί ο συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης ρ(X,Y) των τ.μ. X και Y.

Λύση

Ως γνωστό, $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$, ενώ $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Οι περιθωριακές κατανομές πιθανότητας των X και Y είναι:

$$f_{X,Y}(x) = \sum_{y=1}^{3} \frac{x+y}{21} = \frac{x+1}{21} + \frac{x+2}{21} + \frac{x+3}{21} = \frac{3x+6}{21} = \frac{x+2}{7}, \quad x = 1,2.$$

$$f_{X,Y}(y) = \sum_{x=1}^{2} \frac{x+y}{21} = \frac{1+y}{21} + \frac{2+y}{21} + \frac{3+2y}{21}, \quad y = 1,2,3.$$

Οπότε,

$$E(X) = \sum_{x=1}^{2} x\left(\frac{x+2}{7}\right) = 1\left(\frac{1+2}{7}\right) + 2\left(\frac{2+2}{7}\right) = \frac{3}{7} + \frac{8}{7} = \frac{11}{7},$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{2} x^2\left(\frac{x+2}{7}\right) = \frac{19}{7},$$

$$V(X) = \sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{12}{49} \Rightarrow \sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{12}{49}},$$

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{3} y\left(\frac{2y+3}{21}\right) = \frac{46}{21}, \qquad E(Y^2) = \sum_{y=1}^{3} y^2\left(\frac{2y+3}{21}\right) = \frac{114}{21},$$

$$V(Y) = \sigma^2(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{278}{441} \Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{\frac{278}{441}},$$

$$E(XY) = \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{3} xy\, f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{3} xy\left(\frac{x+y}{21}\right) = \sum_{y=1}^{3} y\frac{(y+1)+2(y+2)}{21} = \frac{24}{7}.$$

Άρα,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{24}{7} - \frac{11}{7}\frac{46}{21} = -\frac{2}{147},$$

οπότε ο ζητούμενος συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης ρ(X,Y) των τ.μ. X και Y είναι,

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\frac{-2}{147}}{\sqrt{\frac{12}{49}}\sqrt{\frac{278}{441}}} \cong -0.035.$$

5.9. Γενικές Ασκήσεις *(στις πολυδιάστατες τ.μ.)*

1) Έστω ότι οι λάμπες φωτισμού 100 (Watt) μιας βιομηχανίας, πωλούνται στο εμπόριο σε συσκευασία ανά τετράδα και ότι η διάρκεια ζωής τους ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$, με μ=1000 και σ=100.

Να υπολογιστούν:

α) Η κοινή κατανομή πιθανότητας, των τ.μ. που εκφράζουν τη διάρκεια ζωής των λαμπών ανά τετράδα,

β) Η πιθανότητα ότι η διάρκεια ζωής κάθε λάμπας είναι τουλάχιστον 900 ώρες,

γ) Η πιθανότητα ότι η διάρκεια ζωής κάθε λάμπας είναι το πολύ 1050 ώρες.

Λύση

Θεωρούμε τις τ.μ. X_i, $i=1,2,3,4$ που εκφράζουν τη διάρκεια ζωής της i λάμπας στη συσκευασία της τετράδας λαμπών. Προφανώς οι τ.μ. X_i, $i=1,2,3,4$ είναι ανεξάρτητες τ.μ., αφού η διάρκεια ζωής της μιας λάμπας στην τετράδα δεν εξαρτάται φυσιολογικά από τη διάρκεια ζωής της άλλης λάμπας.

Οπότε έχουμε:

α) Η κοινή κατανομή πιθανότητας των 4 ανεξάρτητων τ.μ. X_1, X_2, X_3, X_4, είναι:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \prod_{i=1}^{4} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^4 e^{-\sum_{i=1}^{4}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ όπου } \mu = 1000,\ \sigma = 100 .$$

β) Η πιθανότητα ότι η διάρκεια ζωής κάθε λάμπας είναι τουλάχιστον 900 ώρες, είναι:

$$P(X_1 \geq 900, X_2 \geq 900, X_3 \geq 900, X_4 \geq 900) = \prod_{i=1}^{4} P(X_i \geq 900) =$$

$$P(X_1 \geq 900)P(X_2 \geq 900)P(X_3 \geq 900)P(X_4 \geq 900) = [1-\Phi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})]^4 = [1-\Phi(\frac{900-1000}{100})]^4 =$$

$$(0.8413)^4 = 0.501.$$

γ) Η πιθανότητα ότι η διάρκεια ζωής κάθε λάμπας είναι το πολύ 1050 ώρες, είναι:

$$P(X_1 < 1050, X_2 < 1050, X_3 < 1050, X_4 < 1050) = \prod_{i=1}^{4} P(X_i < 1050) =$$

$$P(X_1 < 1050)P(X_2 < 1050)P(X_3 < 1050)P(X_4 < 1050) = [\Phi(\frac{1050-1000}{100})]^4 = (0.6915)^4 = 0.228.$$

2) Μια διδιάστατη διακριτή τ.μ. (X,Y) έχει κοινή κατανομή πιθανότητας f που δίνεται από τον πίνακα:

f(x,y)			
Y\X	**6**	**8**	**10**
1	0.2	0	0.2
2	0	0.2	0
3	0.2	0	0.2

Να βρεθούν: E(X), E(Y), E(XY) και να εξεταστεί αν οι X,Y είναι ανεξάρτητες.

Λύση

Είναι:

$$E(X) = \sum_{x_i}\sum_{y_j} x_i f(x_i, y_j) = 6(0.2)+6(0)+6(0.2)+8(0)+8(0.2)+8(0)+10(0.2)+10(0)+10(0.2)=8\ ,$$

$$E(Y) = \sum_{x_i}\sum_{y_j} y_j f(x_i, y_j) = 1(0.2)+1(0)+1(0.2)+2(0)+2(0.2)+82(0)+3(0.2)+3(0)+3(0.2)=2\ ,$$

$$E(XY) = \sum_{x_i}\sum_{y_j} x_i y_j f(x_i, y_j) = 6.1.(0.2)+6.2.(0)+6.3.(0.2)+8.1.(0)+8.2.(0.2)+8.3.(0)+...+10.3.(0.2)=16\ .$$

Τέλος για να είναι οι X,Y ανεξάρτητες, πρέπει να ισχύει:

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = f_X(x_i) f_Y(y_j), \quad \forall x_i, y_j .$$

Όμως, π.χ. για $x_i = 8,\ y_j = 3$, παίρνουμε:

$f_X(8) = f(8,1) + f(8,2) + f(8,3) = 0 + 0.2 + 0 = 0.2$ και

$f_Y(3) = f(6,3) + f(8,3) + f(10,3) = 0.2 + 0 + 0.2 = 0.4,$ ενώ

$f_{X,Y}(8,3) = 0 \neq f_X(8) f_Y(3) = (0.2)(0.4) = 0.8.$

Άρα οι τ.μ. X,Y, είναι εξαρτημένες.

3) Μια διδιάστατη τ.μ. (X,Y) έχει κοινή κατανομή πιθανότητας,

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & \text{όταν } 0 \le x \le y \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν:

α) $f_X(x)$ και $f_Y(y)$, β) E(X), E(Y) και E(XY), γ) V(X) και V(Y), δ) Cov(X,Y) και ρ(X,Y), ε) $f_{X|Y}(x|y)$ και ζ) Να εξεταστεί αν οι τ.μ. X,Y είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητες.

Λύση

α) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_x^1 8xydy=8x[\frac{y^2}{2}]_x^1=8x[\frac{1^2}{2}-\frac{x^2}{2}]=4x(1-x^2), \quad 0\le x\le 1$,

και

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_0^y 8xydx=8y[\frac{x^2}{2}]_0^y=4y^3, \quad 0\le y\le 1.$$

β) $E(X)=\mu_X=\int_0^1\int_0^y xf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^y x8xydxdy=\int_0^1([8\frac{x^3}{3}y]_{x=0}^{x=y})dy=\int_0^1\frac{8y^4}{3}dy=[\frac{8y^5}{3\times 5}]_0^1=\frac{8}{15}$,

$$E(Y)=\mu_Y=\int_0^1\int_0^y yf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^y y8xydxdy=\int_0^1([8\frac{x^2}{2}y^2]_{x=0}^{x=y})dy=\int_0^1 4y^4dy=[\frac{4y^5}{5}]_0^1=\frac{4}{5}$$

και

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dy=\int_0^1\int_0^y xy8xydxdy=\int_0^1([8\frac{x^3}{3}y^2]_{x=0}^{x=y})dy=\int_0^1\frac{8y^5}{3}dy=[\frac{8y^6}{3\times 6}]_0^1=\frac{4}{9}.$$

γ) $V(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^2f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^y(x-\frac{8}{15})^2 8xydxdy=\frac{11}{225}$,

$$V(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_Y)^2f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^y(y-\frac{4}{5})^2 8xydxdy=\frac{2}{75}.$$

δ) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{9}-\frac{8}{15}\frac{4}{5}=\frac{12}{675}$

και

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\frac{\frac{12}{675}}{\sqrt{(\frac{11}{225})(\frac{2}{75})}}=\frac{4}{\sqrt{66}}.$$

ε) $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{8xy}{4y^3}=\frac{2x}{y^2}, \quad 0\le x\le y$.

ζ) $f_X(x)f_Y(y)=16xy^3(1-x^2)\ne 8xy=f(x,y), \quad x=y=1$,
άρα οι τ.μ. X,Y είναι εξαρτημένες.

4) Οι τ.μ. X,Y, έχουν κοινή κατανομή πιθανότητας,

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2}), & \text{όταν } 0<x<1, \quad 0<y<2,\\ 0, & \text{αλλού.}\end{cases}$$

Να υπολογιστούν:

i) Η περιθωριακή κατανομή πιθανότητας $f_Y(y)$ της τ.μ. Y,

ii) Η περιθωριακή αθροιστική κατανομή πιθανότητας $F_Y(y)$ της τ.μ. Y,

iii) Η διάμεσος δ της Y,

iv) Η μέση τιμή της τ.μ. Y^2, δηλ. $E(Y^2)$,

v) Η δεσμευμένη πιθανότητα $P(X<\frac{1}{2}|Y=1)$,

vi) Η δεσμευμένη πιθανότητα $P(X<\frac{1}{2}|Y>1)$.

Λύση

i) Η περιθωριακή κατανομή πιθανότητας της τ.μ. Y, δηλ. η $f_Y(y)$, δίνεται από τον τύπο:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_0^1 \frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2})dx \quad \text{και άρα,} \quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{7}+\frac{3}{14}y, & \text{όταν } 0<y<2\\ 0, & \text{αλλού.}\end{cases}$$

ii) Η περιθωριακή αθροιστική κατανομή πιθανότητας $F_Y(y)$ της Y, δίνεται από τον τύπο: $F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt$.

Οπότε εδώ, για $0<y<2$, είναι: $F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt=\int_0^y (\frac{2}{7}+\frac{3}{14}t)$.

Συνεπώς: $$F_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{όταν } y\le 0\\ \frac{2}{7}y+\frac{3}{28}y^2, & \text{όταν } 0<y<2\\ 1, & \text{όταν } 2\le y\end{cases}$$

iii) Για να βρούμε τη διάμεσο δ της τ.μ. Y, λύνουμε την εξίσωση $F_Y(y)=0.5$, δηλ.

$$F_Y(y)=0.5 \Leftrightarrow \frac{2}{7}y+\frac{3}{28}y^2=0.5 \Leftrightarrow y=\begin{cases}1.205\\ -3.872\end{cases},$$

όπου η αρνητική λύση απορρίπτεται αφού δεν ανήκει στο διάστημα (0,2).

Επειδή δε στο διάστημα αυτό η $F_Y(y)$ είναι γνησίως μονότονη, άρα η μοναδική λύση που αποτελεί και τη ζητούμενη διάμεσο είναι δ=1.205 .

iv) Ως γνωστόν ισχύει: $E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$, οπότε εδώ,

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)dy = \int_0^2 y^2(\frac{2}{7}+\frac{3}{14}y)dy = \frac{34}{21}.$$

v) Για να βρούμε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(X<\frac{1}{2}|Y=1)$, πρώτα βρίσκουμε τη δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X όταν Y=y, δηλ.

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2})}{\frac{2}{7}+\frac{3}{14}y} = \frac{6x(x+\frac{y}{2})}{2+\frac{3}{2}y}, \quad (I).$$

Οπότε:

$$P(X<\frac{1}{2}|Y=1) = \int_0^{1/2} \frac{6x(x+\frac{1}{2})}{2+\frac{3}{2}.1}dx = 0.179.$$

vi) Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση (I), η ζητούμενη δεσμευμένη πιθανότητα είναι:

$$P(X<\frac{1}{2}|Y>1) = \int_0^{1/2}\int_1^2 \frac{6x(x+\frac{y}{2})}{2+\frac{3}{2}y}dydx = 0.191.$$

5) Οι τ.μ. X,Y, έχουν κοινή κατανομή πιθανότητας f(x,y), που δίνεται από τον πίνακα,

f(x,y)			
X\Y	**1**	**2**	**3**
1	$\frac{6}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$
2	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{1}{30}$
3	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$

Να βρεθούν:

i) Οι περιθωριακές κατανομές πιθανότητας, $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

ii) Οι δεσμευμένες κατανομές πιθανότητας, $f_{X|Y}(x|2)$, $f_{Y|X}(y|1)$.

iii) Να εξεταστεί αν οι τ.μ. X,Y είναι ανεξάρτητες.

Λύση

i) Είναι:

$$f_X(1) = \frac{6}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30} = \frac{8}{30}, \quad f_X(2) = \frac{4}{30}+\frac{5}{30}+\frac{1}{30} = \frac{10}{30}, \quad f_X(3) = \frac{2}{30}+\frac{4}{30}+\frac{6}{30} = \frac{12}{30},$$

$$f_Y(1) = \frac{6}{30}+\frac{4}{30}+\frac{2}{30} = \frac{12}{30}, \quad f_Y(2) = \frac{1}{30}+\frac{5}{30}+\frac{4}{30} = \frac{10}{30}, \quad f_Y(3) = \frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{6}{30} = \frac{8}{30}.$$

Δηλ. οι περιθωριακές κατανομές πιθανότητας, $f_X(x)$, $f_Y(y)$, συνοπτικά είναι:

X	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{8}{30}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{12}{30}$

Y	1	2	3
$f_Y(y)$	$\frac{12}{30}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{8}{30}$

ii)

$$f_{X|Y}(x|2)=\frac{f(x,2)}{f_Y(2)}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} f_{X|Y}(1|2)=\dfrac{f(1,2)}{f_Y(2)}=\dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{10}{30}}=\dfrac{1}{10}\\ f_{X|Y}(2|2)=\dfrac{f(2,2)}{f_Y(2)}=\dfrac{\frac{5}{30}}{\frac{10}{30}}=\dfrac{5}{10}\\ f_{X|Y}(3|2)=\dfrac{f(3,2)}{f_Y(2)}=\dfrac{\frac{4}{30}}{\frac{10}{30}}=\dfrac{4}{10}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

X	1	2	3
$f_{X\|Y}(x\|2)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{4}{10}$

$$f_{Y|X}(y|1)=\frac{f(1,y)}{f_X(1)}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} f_{Y|X}(1|1)=\dfrac{f(1,1)}{f_X(1)}=\dfrac{\frac{6}{30}}{\frac{8}{30}}=\dfrac{6}{8}\\ f_{Y|X}(2|1)=\dfrac{f(1,2)}{f_X(1)}=\dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{8}{30}}=\dfrac{1}{8}\\ f_{Y|X}(3|1)=\dfrac{f(1,3)}{f_X(1)}=\dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{8}{30}}=\dfrac{1}{8}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Y	1	2	3
$f_{Y\|X}(y\|1)$	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Ας σημειωθεί ότι: $\sum_{i=1}^{3} f_{X|Y}(x_i|2)=\sum_{j=1}^{3} f_{Y|X}(y_j|1)=1=\sum_{i=1}^{3} f_X(x_i)=\sum_{j=1}^{3} f_{Y|X}(y_j|1)$.

iii) Τέλος, για να είναι ανεξάρτητες οι X, Y, πρέπει να ισχύει

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),\ \forall(x,y)\in X(\Omega).$$

Όμως, π.χ. για (x,y)=(1,1) βρίσκουμε:

$$f_X(1)f_Y(1)=\frac{8}{30}\cdot\frac{12}{30}=\frac{96}{900}=\frac{32}{300}\neq f(1,1)=\frac{6}{30}=\frac{60}{300}.$$

Συνεπώς, οι τ.μ. X,Y δεν είναι ανεξάρτητες (αλλά είναι στοχαστικά εξαρτημένες).

<u>Κεφάλαιο Β</u>

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Η Στατιστική είναι ένας από τους βασικούς τομείς των σύγχρονων Μαθηματικών, που οι εφαρμογές της χρησιμοποιούνται σήμερα σε όλες σχεδόν τις άλλες επιστήμες, όπως π.χ. στην Οικονομία, στη Βιολογία, στη Φυσική, στην Ιατρική, στη Σεισμολογία, στην Αρχαιολογία, στη Γλωσσολογία, στη Μετεωρολογία, στις Κοινωνικές και Πολιτικές Επιστήμες, καθώς και σε πολλά πεδία της σύγχρονης πραγματικότητας, όπως στη Βιομηχανία, Δημογραφία, Πολιτική, Δημοσκοπήσεις, Εμπόριο, Διαφήμιση, Μάρκετινγκ, κτλ.

Η Στατιστική είναι η επιστήμη που ασχολείται με τις μεθόδους συλλογής δεδομένων (σχεδιασμός πειραμάτων τύχης, μέθοδοι δειγματοληψίας), τη συνοπτική περιγραφή και ανάλυση των δεδομένων (περιγραφική και διερευνητική στατιστική) και την εξαγωγή συμπερασμάτων (στατιστική συμπερασματολογία).
Έτσι, βασικοί στόχοι της Στατιστικής είναι η συλλογή, η περιγραφή, η ανάλυση και η ερμηνεία αριθμητικών δεδομένων, με τελικό σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων για τη λήψη σωστών αποφάσεων.

Η Στατιστική μπορεί να χωριστεί γενικά σε τρεις κυρίως κλάδους:
α) την *Περιγραφική Στατιστική,* η οποία ασχολείται με την παρουσίαση των δεδομένων, την παράστασή τους σε μορφή γραφημάτων και τον υπολογισμό περιγραφικών μέτρων, χωρίς προβλέψεις και γενικεύσεις,
β) την *Επαγωγική ή Πιθανοθεωρητική Στατιστική*, που μέσω της Πιθανοθεωρίας και των πιθανοθεωρητικών μοντέλων, από ένα τυχαίο μερικό δείγμα μπορούμε να γενικεύσουμε και να επάγουμε προβλέψεις και συμπεράσματα για όλον τον στατιστικό πληθυσμό, και
γ) τη *Διερευνητική Στατιστική* και *Ανάλυση Δεδομένων*, η οποία (πέρα από πιθανοθεωρητικές δεσμεύσεις και προκαθορισμένα μοντέλα) επιχειρεί να αναλύσει πολυμεταβλητά συνήθως δεδομένα, με χρήση κυρίως εννοιών και μεθόδων της Γραμμικής Άλγεβρας, αποσκοπώντας στην ανάδειξη τυχόν δεσμών μεταξύ πολυπαραγοντικών φαινομένων και στην εξόρυξη ενδεχόμενων συσχετίσεων μεταξύ των πολυάριθμων συνήθως μεταβλητών.

Τέλος, θα μπορούσαμε να διακρίνουμε τη Στατιστική σε δύο μεγάλες ενότητες:
Α) *Στη Μαθηματική ή Θεωρητική Στατιστική*, που ασχολείται κυρίως με τη μαθηματική θεμελίωση των στατιστικών μεθοδολογιών (Θεωρήματα, Αποδείξεις ιδιοτήτων-μαθηματικών σχέσεων, ανάπτυξη νέων θεωριών και στατιστικών μεθόδων, κτλ), αντικείμενο με το οποίο ασχολούνται κυρίως οι Μαθηματικοί, και
Β) *Στην Εφαρμοσμένη Στατιστική*, που αφορά κυρίως τη βελτίωση της χρήσης και την επέκταση των πρακτικών εφαρμογών της, (ας σημειωθεί ότι σήμερα δεν νοούνται σύγχρονες στατιστικές πράξεις χωρίς τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών).

1.2. Παρατηρήσεις

1) Όπως ήδη γνωρίζουμε, Πληθυσμό λέμε γενικά στη Στατιστική ορολογία ένα σύνολο για το οποίο ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε κάποια χαρακτηριστικά του, δηλ. το σύνολο των υπό εξέταση στοιχείων σε μια στατιστική ανάλυση το ονομάζουμε Πληθυσμό. Έτσι γίνεται φανερό ότι οι συνήθεις έννοιες Πληθυσμός και Δειγματοχώρος που χρησιμοποιούμε στην Πιθανοθεωρία, είναι συναφείς έννοιες και θεωρούνται γενικά ταυτόσημες.

Εντούτοις οι έννοιες του Πληθυσμού και του Δειγματοχώρου ενός πειράματος τύχης, αυστηρά στατιστικά δεν θεωρούνται ακριβώς ίδιες. Πιο συγκεκριμένα και σε αυστηρότερη μαθηματική γλώσσα, έχουμε:

Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε τα στοιχεία ενός πληθυσμού εκφράζονται όπως γνωρίζουμε από μια τ.μ. Χ. Οπότε υπό την έννοια της τ.μ., ***(στατιστικός) πληθυσμός*** ονομάζεται το σύνολο των (αριθμητικών) τιμών της τ.μ. $X:\Omega \to X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$, δηλ. υπό την έννοια αυτή, ο πληθυσμός ταυτίζεται με το Χ(Ω), ενώ Ω είναι ο δειγματοχώρος του π.τ. Ο πληθυσμός μπορεί να είναι πεπερασμένος (π.χ. οι φοιτητές ενός τμήματος), ή άπειρος (π.χ. τα ψάρια ενός ωκεανού, πρακτικά).

Π.χ. σε μια στατιστική ανάλυση της βαθμολογίας στα Μαθηματικά των σπουδαστών του Τμήματος Ηλεκτρονικής του ΤΕΙ Λαμίας, το σύνολο των υπό εξέταση στοιχείων είναι το σύνολο των σπουδαστών (Ω) που εγγράφονται στο μάθημα αυτό. Το υπό εξέταση χαρακτηριστικό Χ είναι ο βαθμός των σπουδαστών στα Μαθηματικά. Το σύνολο των βαθμών των σπουδαστών στα Μαθηματικά αποτελεί τον (στατιστικό) πληθυσμό Χ(Ω).

2) Η (Πιθανοθεωρητική) Στατιστική βασίζεται στην επαγωγική διαδικασία, δηλ. μελετώντας ένα γνωστό τμήμα του πληθυσμού (το δείγμα), επιχειρεί να βγάλει επαγωγικά συμπεράσματα για ολόκληρο τον πληθυσμό. Έτσι από τις μετρήσεις, οδηγείται στα μοντέλα μέτρησης της πραγματοποίησης των ενδεχομένων, δηλ. στην έννοια της κατανομής πιθανοτήτων. Διακρίνουμε γενικά δύο είδη κατανομών: την κατανομή του πληθυσμού (που βασίζεται στην Πιθανοθεωρία, Πιθανοθεωρητική Στατιστική) και την κατανομή του δείγματος (που βασίζεται στην έννοια της σχετικής συχνότητας, Περιγραφική και Διερευνητική Στατιστική).

Η (Πιθανοθεωρητική) Στατιστική διακρίνεται, *στην **Παραμετρική** και **μη-Παραμετρική Στατιστική*** όπου: στην Παραμετρική Στατιστική θεωρείται γνωστή η κατανομή του πληθυσμού και αναζητούνται οι άγνωστες παράμετροι αυτής, όπως μέση τιμή, διασπορά, κτλ, ενώ στη μη-Παραμετρική Στατιστική θεωρείται άγνωστη η κατανομή του πληθυσμού.

Επίσης, στα περισσότερα Στατιστικά (πιθανοθεωρητικά) προβλήματα, τα κύρια θέματα είναι: ***ο Έλεγχος Υποθέσεων*** και ***η Εκτίμηση Παραμέτρων***.

Στον Έλεγχο Υποθέσεων, από τα δεδομένα ενός δείγματος κάνουμε υποθέσεις και επαγωγικές προβλέψεις για ολόκληρο τον πληθυσμό (πράγμα όμως που μπορεί να οδηγήσει και σε απόρριψη των υποθέσεων). Στην Εκτίμηση Παραμέτρων, με τη βοήθεια ενός δείγματος από μια γνωστή Κατανομή, επιχειρούμε να προσδιορίσουμε προσεγγιστικά τις άγνωστες παραμέτρους της κατανομής.

Ας σημειωθεί ότι δείγμα ονομάζουμε γενικά ένα υποσύνολο του πληθυσμού. Βέβαια η λήψη ενός (τυχαίου) δείγματος από έναν πληθυσμό γίνεται με συγκεκριμένες μεθοδολογίες και κανόνες τυχαιότητας, που αποτελούν έναν ιδιαίτερο κλάδο της Στατιστικής (Δειγματοληψία). Έτσι ***τυχαίο δείγμα*** λέμε αυτό, όπου κάθε στοιχείο του πληθυσμού έχει την ίδια πιθανότητα να συμπεριληφθεί σε αυτό.

Οι κυριότερες μέθοδοι δειγματοληψίας είναι: η *Τυχαία Δειγματοληψία*, η *Δειγματοληψία κατά Στρώματα*, η *Συστηματική Δειγματοληψία*, κτλ.

2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΈΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

2.1. Στη Στατιστική ένα οποιοδήποτε σύνολο $\Omega \neq \varnothing$ που μας ενδιαφέρει, λέγεται όπως ήδη είπαμε Πληθυσμός.
Π.χ. α) Ο πληθυσμός των ανέργων που καταγράφει ο ΟΑΕΔ,
β) Ο πληθυσμός των αυτοκινήτων που κατασκευάζει ένα εργοστάσιο.

Η ιδιότητα (ή το χαρακτηριστικό) ως προς την οποία εξετάζεται ένας πληθυσμός λέγεται μεταβλητή (τυχαία μεταβλητή).
Προφανώς (όπως ήδη γνωρίζουμε από την Πιθανοθεωρία) ένας πληθυσμός μπορεί να εξετάζεται ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά, δηλ. ως προς μια ή περισσότερες μεταβλητές, οπότε μιλάμε για μονοδιάστατο-μονομεταβλητό ή πολυδιάστατο-πολυμεταβλητό πληθυσμό, αντίστοιχα.
Π.χ. στο παραπάνω α΄ παράδειγμα, οι άνεργοι μπορεί να εξεταστούν ως προς την ηλικία τους, ως προς πόσα παιδιά έχουν, ή ως προς το επάγγελμά τους, κτλ,
ενώ στο β΄ παράδειγμα τα αυτοκίνητα μπορεί να εξεταστούν ως προς την τιμή τους, το χρώμα τους, την ιπποδύναμή τους ή τον κυβισμό τους, κτλ.

Οι Στατιστικές μελέτες βασίζονται σε δεδομένα παρατηρήσεων που προέρχονται από μεταβλητές που αναφέρονται σε διάφορα φαινόμενα ή πειράματα τύχης (με τον όρο μεταβλητές στη Στατιστική εννοούμε πάντα τυχαίες μεταβλητές).
Τα αποτελέσματα των μετρήσεων των μεταβλητών λέγονται ***παρατηρήσεις***.
Οι παρατηρήσεις μπορεί γενικά να είναι αριθμοί, αντικείμενα, σύμβολα, κτλ, αλλά όπως ήδη είδαμε στην Πιθανοθεωρία, μπορούν όλες οι παρατηρήσεις με κατάλληλους μετασχηματισμούς να μετατραπούν σε αριθμούς (βλ. ορισμό τ.μ. στις Πιθανότητες).
Οι παρατηρήσεις συμβολίζονται, $x_1, x_2, ..., x_n$, όταν είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X, ή $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$, όταν είναι οι τιμές μιας διδιάστατης μεταβλητής (X,Y), δηλ. όταν ο πληθυσμός είναι μονομεταβλητός ή διμεταβλητός, κλπ.

2.2. Είδη Μεταβλητών και Παρατηρήσεων

Οι παρατηρήσεις και οι αντίστοιχες μεταβλητές, διακρίνονται σε δύο βασικά είδη, στις ποσοτικές και στις ποιοτικές.

1. ***Ποσοτικές*** λέγονται οι μεταβλητές που οι τιμές τους είναι μετρήσιμες (δηλ. οι τιμές τους είναι πραγματικοί αριθμοί).
Π.χ. το βάρος των κατοίκων ενός χωριού, ή ο αριθμός των παιδιών μιας οικογένειας.
Τις ποσοτικές μεταβλητές τις χωρίζουμε σε δύο κατηγορίες:
i) Στις διακριτές μεταβλητές (όπου η τ.μ. X παίρνει μεμονωμένες μόνο τιμές, δηλ. το πεδίο τιμών X(Ω) είναι υποσύνολο των φυσικών αριθμών N ή των ακεραίων Z), και
ii) Στις συνεχείς μεταβλητές (όπου η τ.μ. X μπορεί να πάρει όλες τις τιμές από ένα συνεχές υποδιάστημα (α,β) του $\mathbb{R}$, δηλ. $X(\Omega) = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$).

2. ***Ποιοτικές*** λέγονται οι μεταβλητές που οι τιμές τους δεν είναι (απευθείας) αριθμοί, αλλά εκφράζουν καταστάσεις.
Π.χ. το φύλο, το θρήσκευμα, το επάγγελμα, η διαγωγή ενός μαθητή, η κατάσταση υγείας, η ψυχολογική κατάσταση, κτλ.

Συχνά τις ποιοτικές μεταβλητές διακρίνουμε στις λεγόμενες διατάξιμες και στις κατηγορικές μεταβλητές, με την εξής διαφορά:
Οι *διατάξιμες* μεταβλητές παίρνουν τιμές που διατάσσονται δηλ. ιεραρχούνται ή διαβαθμίζονται, όπως π.χ. η διαγωγή ενός μαθητή είτε η κατάσταση υγείας, που μπορεί να διαβαθμιστεί (καλή, μέτρια, κακή, κτλ). Οι διατάξιμες παρατηρήσεις και μεταβλητές χρησιμοποιούνται συνήθως στην Ιατρική, Βιολογία, Ψυχιατρική (απολυταρχικότητα, επιθετικότητα, βιαιότητα, κτλ).
Ενώ οι *κατηγορικές* μεταβλητές δεν διατάσσονται ή λέμε ότι είναι αδιαβάθμητες, όπως π.χ. το φύλο (άνδρας-γυναίκα), το θρήσκευμα (χριστιανός-μωαμεθανός-βουδιστής, κλπ), το επάγγελμα (εργάτης, αγρότης, υπάλληλος, κτλ).
Συνοπτικά, οι παραπάνω έννοιες αποσαφηνίζονται στον επόμενο πίνακα παραδειγμάτων.

Πληθυσμός (Ω)	**Μεταβλητή (Χ)**	**Είδος Μεταβλητής**	**Τιμές, Χ(Ω) $\subseteq \mathbb{R}$**
Αθηναίοι	βάρος	ποσοτική, συνεχής	$(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}^+$
Αθηναίοι	φύλο	ποιοτική, κατηγορική	άνδρας (1), γυναίκα (2)
Λαμιώτες	ηλικία	ποσοτική, συνεχής	$(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}^+$
Ευρωπαίοι	θρήσκευμα	ποιοτική, κατηγορική	Χριστιανοί (1) Μουσουλμ.(2), κτλ
Μαθητές	διαγωγή	ποιοτική, διατάξιμη	καλή-μέτρια-κακή (1-2-3)
Οικογένειες	αριθμός μελών	ποσοτική, διακριτή	$\mathbb{N}$
Λάμπες φωτισμού	διάρκεια ζωής	ποσοτική, συνεχής	$(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}^+$
Ασθενείς	κατάσταση υγείας	ποιοτική, διατάξιμη	από πολύ κακή, έως καλή (1,2…)
Αυτοκίνητα	χρώμα	ποιοτική, κατηγορική	διάφορα χρώματα
Μετανάστες	χώρα καταγωγής	ποιοτική, κατηγορική	διάφορες χώρες
Αγαθά-Υπηρεσίες	τιμάριθμος	ποσοτική, συνεχής	$(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}^+$
Χώρες της Ευρ. Εν.	πληθωρισμός	ποσοτική, συνεχής	$(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}$
Εξαρτήματα (π.χ. βίδες)	καταλληλότητα	ποιοτική, κατηγορική	ελαττωματικά (-1), μη-ελαττωματ. (1)
Αυτοκίνητα	ατυχήματα	ποσοτική, διακριτή	$\mathbb{N}$
Τηλεθεατές	ζώνη τηλεθέασης ανά 24ωρο	ποιοτική, κατηγορική	πρωινή (-1), μεσημβρινή (0), βραδυνή (1),
Άνεργοι	επάγγελμα	ποιοτική, κατηγορική	διάφορα επαγγέλματα (1,2,3,…)
Πόλεις της Ελλάδας	θερμοκρασία	ποσοτική, συνεχής	$(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}$
Πόλεις της Ελλάδας	πληθυσμός ανά 10ετία, μεταβολή σε κατοίκους	ποσοτική, διακριτή	$\mathbb{Z}$

3. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

3.1. Παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων

Μετά τη συλλογή των στατιστικών στοιχείων γίνεται η ταξινόμηση και η παρουσίασή τους. Η ***Παρουσίαση των στατιστικών στοιχείων*** γίνεται με τρεις κυρίως τρόπους:
α) Με κατασκευή πινάκων συχνοτήτων, β) Μέσω γραφικής παράστασης των πινάκων συχνοτήτων, γ) Με μορφή αναλυτικών εκφράσεων των πινάκων συχνοτήτων.

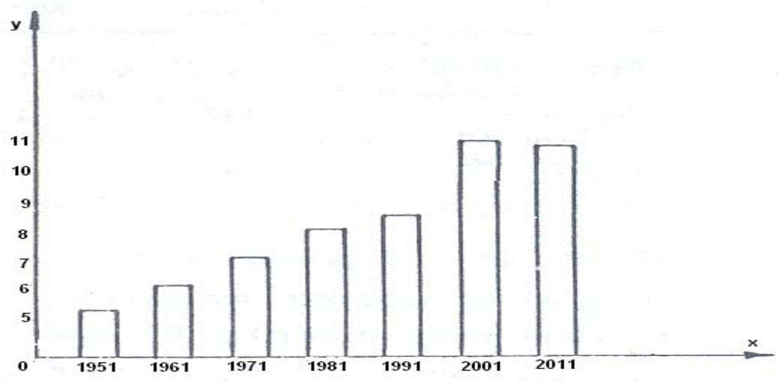
Η κατανομή ενός πληθυσμού ως προς μια ποσοτική μεταβλητή, παρουσιάζεται συνήθως υπό μορφή πινάκων συχνοτήτων που λέγεται και ***πίνακας απλής εισόδου***. Όταν ο πληθυσμός εξετάζεται ως προς 2 χαρακτηριστικά (μεταβλητές) συγχρόνως, τότε δημιουργούμε τους ***πίνακες διπλής εισόδου***, (ενώ αν εξετάζεται γενικότερα για περισσότερες από 2 μεταβλητές μιλάμε για πολυμεταβλητούς ή ομαδικούς πίνακες).
Π.χ.
*1. **Πίνακας Απλής Εισόδου**-(1)*
Ο Πληθυσμός της Ελλάδας ανά 10ετή απογραφή (από 1951-2011):

Έτος	*Πληθυσμός*
1951	7.637.801
1961	8.388.553
1971	8.768.641
1981	9.585.764
1991	10.093.276
2001	11.112.608
2011	11.089.321

*2. **Πίνακας Διπλής Εισόδου**-(2)*
Κατανομή 1000 σπουδαστών ως προς το φύλο και το χρώμα των ματιών τους:

Φύλο	*Χρώμα ματιών*			
	Μαύρα	*Καστανά*	*Γαλαζοπράσινα*	Σύνολο
Άνδρες	195	326	33	554
Γυναίκες	167	212	67	446
Σύνολο	362	538	100	1000

Για τους παραπάνω πίνακες μπορούμε να σχηματίσουμε και τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις (καρτεσιανά, ή χρονολογικά διαγράμματα, κτλ), θέτοντας π.χ. για τον Πίν.1, στον οριζόντιο άξονα x τις χρονολογίες (1951,…,2011) και στον κατακόρυφο άξονα y τον αντίστοιχο πληθυσμό υπό μορφή ορθογωνίων παραλληλογράμμων.



Για τις ποιοτικές μεταβλητές που δεν είναι εφικτή η γραφική τους παράσταση σε καρτεσιανό διάγραμμα, συνήθως καταφεύγουμε σε διάφορα γνωστά εικονογραφήματα, όπως ιστογράμματα, ραβδογράμματα, κυκλικά διαγράμματα, κτλ. Π.χ.

Η επιφάνεια-έκταση της γης (σε εκατομμύρια km^2), ως προς τις 5 ηπείρους, είναι:

Πίνακας-(3)

Ήπειροι	*Έκταση*
Αμερική	20.8
Ασία	44.0
Αφρική	30.5
Ευρώπη	10.5
Ωκεανία	9.0
ΣΥΝΟΛΟ	114.8

Να γίνει το κυκλικό διάγραμμα της έκτασης της γης, ως προς τις 5 ηπείρους.

Λύση

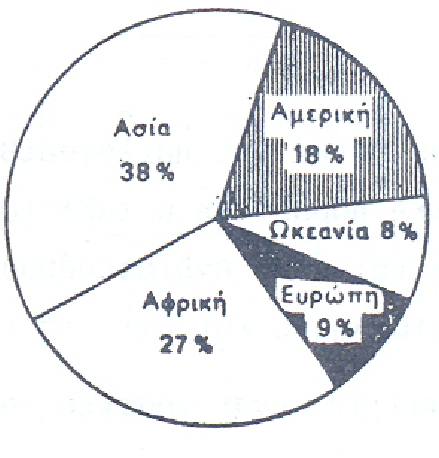
Για να σχηματίσουμε το κυκλικό διάγραμμα, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις γωνίες των κυκλικών τομέων που εκφράζουν τις 5 ηπείρους, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα δεδομένων (3).

Οπότε σε κύκλο (360^0), τα ποσοστά των ηπείρων σε μοίρες, είναι:

Αμερική: $360^0(20.8/114.8)=65^0$, Ασία: $360^0(44.0/114.8)=138^0$,
Αφρική: $360^0(30.5/114.8)=96^0$, Ευρώπη: $360^0(10.5/114.8)=33^0$,
Ωκεανία: $360^0(9.0/114.8)=28^0$,

ή αντίστοιχα επί τοις εκατό (%):
Αμερική (18%), Ασία(38%), Αφρική (27%), Ευρώπη (9%), Ωκεανία (8%).

Συνεπώς, το κυκλικό διάγραμμα της έκτασης της γης, ως προς την έκταση των 5 ηπείρων, είναι:



Σχήμα: *Το κυκλικό διάγραμμα της έκτασης της γης, ως προς τις 5 ηπείρους.*

3.2. Πίνακες Συχνοτήτων

Κατά τη μέτρηση μιας μεταβλητής X μπορεί η κάθε τιμή x_i, (i=1,…,n) της μεταβλητής να εμφανίζεται περισσότερες από μια φορές.

Ορίζονται σχετικά οι έννοιες:

1. ***(Απόλυτη) Συχνότητα*** $\mathbf{f_i}$ μιας τιμής (ή γενικότερα κλάσης) x_i της μεταβλητής X, λέμε το πλήθος των επαναλήψεων της τιμής αυτής σε ένα δείγμα.

2. ***Σχετική Συχνότητα*** $\mathbf{f_i^*}$ μιας τιμής x_i της μεταβλητής X, λέμε το πηλίκο της συχνότητας $\mathbf{f_i}$ προς το άθροισμα του δείγματος $\sum_{i=1}^{n} f_i = \nu$, δηλ. $f_i^* = \frac{f_i}{\nu}$.

(Η σχετική συχνότητα συνήθως εκφράζεται υπό μορφή εκατοστιαίας αναλογίας).

3. ***Αθροιστική Συχνότητα*** $\mathbf{F_i}$ μιας τιμής x_i της μεταβλητής X, λέγεται το άθροισμα των συχνοτήτων όλων των τιμών της X, που είναι μικρότερες ή ίσες της x_i .

4. ***Σχετική Αθροιστική Συχνότητα*** $\mathbf{F_i^*}$ μιας τιμής x_i της μεταβλητής X, λέγεται το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων όλων των τιμών της X, που είναι μικρότερες ή ίσες της x_i .

(Προφανώς οι αθροιστικές συχνότητες έχουν νόημα μόνο για ποσοτικές μεταβλητές).

Σχετικά δίνουμε τους ακόλουθους διασαφηνιστικούς πίνακες, Ι,ΙΙ,ΙΙΙ:

Γενικός Πίνακας Ι

Τιμές x_i της Μεταβλητής X	**Συχνότητα (απόλυτη) f_i**	**Σχετική Συχνότητα f_i^* (%)**	**Αθρ. Συχνότητα (απόλυτη) F_i**	**Σχετική Αθρ. Συχνότητα F_i^* (%)**
$\mathbf{x_1}$	f_1	$f_1^* = f_1/\nu$	$F_1 = f_1$	$F_1^* = f_1^*$
$\mathbf{x_2}$	f_2	$f_2^* = f_2/\nu$	$F_2 = f_1 + f_2$	$F_2^* = f_1^* + f_2^*$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbf{x_i}$	f_i	$f_i^* = f_i/\nu$	$F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i$	$F_i^* = \sum_{i=1}^{i} f_i^* =$ $f_1^* + f_2^* + \ldots + f_i^*$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbf{x_n}$	f_n	$f_n^* = f_n/\nu$	$F_n = \sum_{i=1}^{n} f_i = \nu$	$F_n^* = \sum_{i=1}^{n} f_i^* = 100$
ΣΥΝΟΛΑ	$\sum_{i=1}^{n} f_i = \nu$	100		

Π.χ.

Πίνακας ΙΙ:

(Οικογένειες της Ελλάδας ως προς αριθμό μελών)

Αριθμός μελών οικογένειας, Τιμές x_i	**Συχνότητα αριθμός οικογ.(χιλ.) f_i**	**Σχετική Συχνότητα f_i^* (%)**	**Αθροιστική Συχνότητα F_i**	**Σχετική Αθρ. Συχνότητα F_i^* (%)**
$x_1=1$	$f_1=415$	$f_1^*=f_1/\nu=$ 14.1	$F_1=f_1=$ 415	$F_1^*=f_1^*=$ 14.1
$x_2=2$	$f_2=727$	$f_2^*=f_2/\nu=$ 24.8	$F_2=f_1+f_2=$ 1142	$F_2^*=f_1^*+f_2^*=$ 38.5
$x_3=3$	$f_3=597$	$f_3^*=f_3/\nu=$ 20.3	$F_3=f_1+f_2+f_2=$ 1739	$F_3^*=f_1^*+f_2^*+f_3^*=$ 59.2
4	710	24.2	2449	83.4
5	303	10.3	2752	93.7
6	125	4.3	2877	98.0
7	42	1.4	2919	99.4
8	11	0.4	2930	99.8
$x_9=9$	$f_9=7$	$f_9^*=0.2$	$F_9=2937=\nu$	$F_9^*=100$
ΣΥΝΟΛΑ	$\nu=2937$	100		

Πίνακας ΙΙΙ:

(200 οικογένειες ως προς αριθμό παιδιών τους)

Αριθμός παιδιών οικογένειας, Τιμές x_i	**Συχνότητα, αριθμός οικογενειών f_i**	**Σχετική Συχνότητα f_i^* (%)**	**Αθρ. Συχνότητα F_i**	**Σχετική Αθρ. Συχνότητα F_i^* (%)**
0	84	0.42 (42%)	$F_1=f_1=$ 84	42
1	36	0.18 (18%)	$F_2=f_1+f_2=$ 84+36=120	60
2	66	0.33 (33%)	$F_3=f_1+f_2+f_3=$ 120+66=186	93
3	10	0.05 (5%)	186+10=196	98
4	4	0.02 (2%)	196+4=200=ν	100
ΣΥΝΟΛΑ	$\nu=200$	1 ή 100%		

Παρατήρηση

Οι διακριτές (ασυνεχείς) μεταβλητές που παίρνουν γενικά ακέραιες τιμές, συνήθως είναι εύκολο να σχηματίσουμε τον πίνακα κατανομής των συχνοτήτων τους, θέτοντας σε μια στήλη τις τιμές της μεταβλητής και σε μια δεύτερη στήλη την αντίστοιχη συχνότητα κάθε τιμής. Εάν η μεταβλητή είναι συνεχής, οπότε παίρνει τιμές από ένα συνεχές υποδιάστημα $(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}$, τότε συνήθως ομαδοποιούμε τις συχνότητες ανά κλάσεις, δηλ. διαιρώντας το (α,β) σε (ίσου ή άνισου εύρους) υποδιαστήματα-κλάσεις, π.χ. ταξινομούμε την ηλικία των ενήλικων ανθρώπων ως προς τις κλάσεις: 18-30, 31-40, 41-50, 51-65, 66-85.

3.3. Χαρακτηριστικά (ή Μέτρα) κατανομών συχνοτήτων

Ένα τυχαίο δείγμα πρέπει να αντιπροσωπεύει τον πληθυσμό από τον οποίο προέρχεται. Δηλ. να έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με αυτά του πληθυσμού.
Οι πίνακες κατανομής συχνοτήτων είναι ένας βολικός τρόπος παρουσίασης των τιμών ή παρατηρήσεων μιας μεταβλητής, αλλά όχι όμως και ο συντομότερος.
Συχνά λοιπόν και ιδιαίτερα στις ποσοτικές μεταβλητές, αντί να κάνουμε χρήση ολόκληρου του πίνακα κατανομής, αρκούμαστε (χάριν απλούστευσης αλλά και για ευκολότερη σύγκριση με ομοειδείς πληθυσμούς) σε ορισμένα αντιπροσωπευτικά αριθμητικά χαρακτηριστικά των κατανομών, όπως είναι τα λεγόμενα μέτρα θέσης, μέτρα διασποράς, μέτρα ασυμμετρίας, κτλ.

3.3.1. Μέτρα θέσης

Τα χαρακτηριστικά ή μέτρα θέσης, δίνουν τη θέση των τιμών του δείγματος γύρω από κάποια «κεντρική» τιμή. Ανάλογα με το τι θεωρούμε ως κεντρική τιμή, παίρνουμε διάφορα χαρακτηριστικά θέσης, όπως, η μέση τιμή, η διάμεσος, η κορυφή, το μέσο εύρος του δείγματος, κτλ.
Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

Α) ***Μέση Τιμή ή Μέσος Όρος***

Αν X είναι μια ποσοτική μεταβλητή και $x_1, x_2, ..., x_n$ είναι n το πλήθος παρατηρήσεις-τιμές της X, τότε η μέση τιμή ή δειγματικός μέσος όρος μ, (ή $\overline{x}$), είναι:

$$\mu = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}, \qquad \textbf{(1)}$$

ενώ αν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα σε k κλάσεις με αντίστοιχες συχνότητες f_i, (i=1,2,…,k) , τότε ο μέσος όρος δίνεται από τον τύπο,

$$\mu = \overline{x} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... + f_k x_k}{f_1 + f_2 + ... + f_k}. \qquad \textbf{(2)}$$

Έτσι, π.χ. στον προηγούμενο πίνακα ΙΙΙ, ο μέσος όρος είναι,

$$\mu = \overline{x} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k=5} f_i} \sum_{i=1}^{k=5} f_i x_i = \frac{1}{200}[0(86) + 1(36) + 2(66) + 3(10) + 4(4)] = \frac{1}{200}[214] = 1.07,$$

που σημαίνει ότι οι οικογένειες του δείγματος έχουν κατά μέσο όρο, 1.07 παιδιά.

Ιδιότητες Μέσης Τιμής

i) Ο μέσος όρος μ, βρίσκεται πάντα μεταξύ της μέγιστης και ελάχιστης τιμής της Χ.
ii) Το άθροισμα των διαφορών (αποκλίσεων) όλων των δεδομένων από τον μέσο όρο, είναι πάντα μηδέν, δηλ. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$, ή $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \mu) = 0$.
iii) Αν Χ, Υ είναι μεταβλητές, όπου Υ=κ+λΧ, (κ,λ$\in \mathbb{R}$) και με αντίστοιχους μέσους όρους μ_X , μ_Y , τότε ισχύει: $\mu_Y = \mu(\kappa + \lambda X) = \kappa + \lambda\mu_X$.

Σημείωση (Το αθροιστικό σύμβολο Σ)

Για το σύμβολο του αθροίσματος Σ , ισχύουν οι ιδιότητες:

i) $\sum_i (a_i + b_i) = \sum_i a_i + \sum_i b_i$,

ii) $\sum_i (\kappa a_i + \lambda b_i) = \kappa \sum_i a_i + \lambda \sum_i b_i$, $\kappa, \lambda =$ σταθερές ,

iii) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + \lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \lambda n$. **(3)**

B) ***Διάμεσος*** δ μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ με τιμές $x_1, x_2, ..., x_n$, λέγεται εκείνη η τιμή της μεταβλητής για την οποία οι μισές παρατηρήσεις είναι μικρότερες ή ίσες της δ και οι άλλες μισές είναι μεγαλύτερες. Δηλ. η διάμεσος δ είναι η τιμή της μεταβλητής που αντιστοιχεί σε αθροιστική συχνότητα 50%.

Πιο αναλυτικά:

Καταρχήν λέμε διατεταγμένο κατ' αύξουσα σειρά το δείγμα $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}$, που προκύπτει από τις δεδομένες τιμές $x_1, x_2, ..., x_n$, όπου $x_{(1)}$ είναι η μικρότερη τιμή του δείγματος και $x_{(n)}$ η μεγαλύτερη, έτσι ώστε, $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$.

Τότε η διάμεσος δ του διατεταγμένου δείγματος δίνεται από τον τύπο:

$$\delta = \begin{cases} x_{(k+1)}, & \text{όταν } n = 2k \\ \dfrac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}, & \text{όταν } n = 2k+1 \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

Συνεπώς για τον *υπολογισμό της διαμέσου*, έχουμε:

i) Αν η μεταβλητή είναι διακριτή και οι παρατηρήσεις είναι περιττού πλήθους, τότε αρκεί να τις διατάξουμε, οπότε διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση.

Αν οι παρατηρήσεις είναι άρτιου πλήθους, τότε παίρνουμε ως διάμεσο (θεωρητικά) το ημιάθροισμα των 2 μεσαίων όρων.

Π.χ.

Έστω ότι έχουμε για μια μεταβλητή, τα δεδομένα-παρατηρήσεις: 1,0,3,1,7,5,2,8,1.
Τα διατάσσουμε κατά αύξουσα σειρά: 0,1,1,1,2,3,5,7,8.
Οπότε η μεσαία παρατήρηση είναι η διάμεσος δ, δηλ. δ=2.

ii) Αν πρόκειται για ταξινομημένα δεδομένα και η μεταβλητή είναι διακριτή, τότε η διάμεσος ισούται με τη μεγαλύτερη τιμή x_i από τις 2 αθροιστικές συχνότητες F_i μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο αριθμός ν/2, (όπου $\nu = \sum f_i$).

Π.χ.

Τιμές x_i	Συχνότητα f_i	Αθρ. Συχνότητα F_i
$x_1=0$	$f_1=5$	$F_1=f_1=5$
$x_2=1$	$f_2=10$	$F_2=f_1+f_2=\boxed{15}$
$x_3=2$	$f_3=12$	$F_3=f_1+f_2+f_3=\boxed{27}$
$x_4=3$	$f_4=8$	$F_4=27+8=35$
$x_5=4$	$f_5=5$	$F_5=\Sigma f_i=\nu=40$
ΣΥΝΟΛΑ	$\nu=\sum f_i=40$	

Είναι, $\nu=\sum_{i=1}^{5} f_i=40 \Rightarrow \frac{\nu}{2}=20$. Αλλά το $\frac{\nu}{2}=20$, βρίσκεται μεταξύ των αθροιστικών συχνοτήτων $F_2=15$ και $F_3=27$, οπότε η διάμεσος θα ισούται με την x_3, δηλ. δ= x_3=2.

iii) Αν πρόκειται για συνεχή μεταβλητή, η διάμεσος ισούται με την τιμή της μεταβλητής που αντιστοιχεί στην αθροιστική συχνότητα του 50%, αφού πρώτα ταξινομήσουμε τα δεδομένα.
Π.χ.

Κλάσεις μηνιαίου εισοδήματος x_i (σε ευρώ)	Συχνότητα f_i	Αθρ. Συχνότητα F_i
$x_1=(0,300]$	$f_1=51$	$F_1=f_1=51$
$x_2=(300,600]$	$f_2=126$	$F_2=f_1+f_2=\boxed{177}$
$x_3=(600,1000]$	$f_3=150$	$F_3=f_1+f_2+f_3=\boxed{327}$
$x_4=(1000,2000]$	$f_4=102$	$F_4=429$
$x_5=(2000,3000]$	$f_5=54$	$F_5=483$
$x_6=(3000,5000]$	$f_6=17$	$F_6=\Sigma f_i=\nu=500$
ΣΥΝΟΛΟ	$\nu=\sum_{i=1}^{6} f_i=500$	

Είναι $\frac{\nu}{2}=\frac{500}{2}=250$, που βρίσκεται μεταξύ των Αθρ. Συχνοτήτων $F_2=177$ και $F_3=327$. Άρα η διάμεσος δ θα ισούται με την αντίστοιχη τιμή x_3 της F_3, δηλ. δ=800, όπου 800 είναι η κεντρική τιμή της κλάσης (600,1000].
Συνεπώς το διάμεσο μηνιαίο εισόδημα των φορολογουμένων είναι της κλάσης (600,1000].

Γ) ***Κορυφή*** ενός δείγματος είναι η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα, ενώ ***μέσο εύρος*** ενός δείγματος λέγεται η ποσότητα, $\frac{x_{(1)}+x_{(n)}}{2}$. **(5)**

3.3.2. Μέτρα διασποράς

Έστω οι εξής στατιστικές σειρές δεδομένων:

95	97	100	103	105
50	75	100	125	150

οι οποίες προφανώς έχουν τον ίδιο μέσο όρο και ίδια διάμεσο (100).

Η διαφορά τους έγκειται σε αυτό που στη Στατιστική ονομάζουμε διασπορά, αφού η 2^{η} στατιστική σειρά είναι πολύ πιο διασπαρμένη από ότι η 1^{η} (γύρω από τη κοινή μέση τιμή τους)..
Έτσι έχει ενδιαφέρον μια στατιστική σειρά δεδομένων, όχι μόνον ως προς τα χαρακτηριστικά της κεντρικής τιμής της, αλλά και ως προς τα χαρακτηριστικά ή μέτρα διασποράς αυτής.
Τα σημαντικότερα μέτρα διασποράς είναι: η διασπορά (ή διακύμανση), η τυπική απόκλιση, η μέση απόλυτη απόκλιση, το εύρος μεταβολής, κτλ.

Α) ***Εύρος μεταβολής*** μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ, ονομάζουμε τη διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής της μεταβλητής. **(6)**
Π.χ. στις παραπάνω στατιστικές σειρές, η πρώτη έχει εύρος μεταβολής 10 και η δεύτερη 100.

Β) ***Μέση απόλυτη απόκλιση***
Οι αποκλίσεις (διαφορές) των τιμών x_i, (i=1,…,n), μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ από τον μέσο $\mu = \overline{x}$, θα έδιναν μια εικόνα της διασποράς των τιμών της μεταβλητής από τον μέσο.
Όμως το άθροισμα των αποκλίσεων $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})$, ως γνωστόν είναι πάντα μηδέν, δηλ.:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = (\sum_{i=1}^{n} x_i) - n\overline{x} = n\overline{x} - n\overline{x} = 0, \quad \text{αφού} \quad \overline{x} = \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x} .$$

Έτσι, αναγκαζόμαστε να καταφύγουμε στις απόλυτες τιμές των αποκλίσεων των τιμών x_i από τον μέσο $\overline{x}$, οπότε μιλάμε για τη Μέση Απόλυτη Απόκλιση ε που ορίζεται ως εξής:

$$\varepsilon = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{x}|, \quad \text{(για απλά δεδομένα),} \qquad \textbf{(7)}$$

ή, $$\varepsilon = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} f_i}\sum_{i=1}^{n} f_i\,|x_i - \overline{x}|, \quad \text{(όταν έχουμε ταξινομημένα δεδομένα-σε κλάσεις)} \qquad \textbf{(8)}$$

Π.χ.
Για τις 2 προαναφερόμενες στατιστικές σειρές, οι αποκλίσεις των τιμών x_i από τον μέσο $\mu = \overline{x} = 100$, είναι αντίστοιχα:

1^{η} σειρά,	-5	-3	0	3	5
2^{η} σειρά,	-50	-25	0	25	50

ενώ οι μέσες απόλυτες αποκλίσεις τους είναι αντίστοιχα:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{x}| = \frac{16}{5} = 3.2 \qquad \text{και} \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{x}| = \frac{150}{5} = 30 .$$

Η Μέση απόλυτη απόκλιση λόγω των εμπλεκόμενων απόλυτων τιμών παρουσιάζει λογιστικές δυσκολίες και δεν χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη, ενώ αντίθετα χρησιμοποιείται ευρέως η επόμενη έννοια της διακύμανσης (ή διασποράς) που βασίζεται στα τετράγωνα των αποκλίσεων.

Γ) ***Διακύμανση (ή Διασπορά)*** μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ με τιμές x_i, (i=1,…,n) , λέμε την ποσότητα $V(X) = \sigma^2(X)$ που ορίζεται ως εξής:

$$V(X) = \sigma^2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2, \qquad \text{(όταν τα δεδομένα είναι απλά)}, \qquad \textbf{(9)}$$

$$V(X) = \sigma^2(X) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} f_i}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \mu)^2, \quad \text{(όταν τα δεδομένα είναι ταξινομημένα)}. \qquad \textbf{(10)}$$

Επίσης η θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης λέγεται ***τυπική απόκλιση*** της μεταβλητής Χ, δηλ. για απλά ή ταξινομημένα δεδομένα (αντίστοιχα) είναι:

$$\sqrt{V(X)} = \sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}, \qquad \sqrt{V(X)} = \sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} f_i}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \mu)^2}, \qquad \textbf{(11)}$$

Σημείωση (Ερμηνεία της διακύμανσης):
Η διακύμανση εκφράζει τη συγκεντρωτικότητα (ή μεταβλητότητα) των τιμών x_i της μεταβλητής Χ γύρω από τη μέση τιμή της, $\mu = \bar{x} = E(X)$. Δηλ. η διασπορά $V(X) = \sigma^2(X)$, είναι ένας δείκτης για το πόσο οι τιμές της Χ είναι συγκεντρωμένες ή όχι, μακριά ή κοντά στη μέση τιμή μ. Έτσι μικρή διασπορά σημαίνει πολλές τιμές της Χ κοντά στη μέση τιμή μ, ενώ μεγάλη διασπορά σημαίνει ότι πολλές τιμές της Χ είναι μακριά από το μ.
Π.χ.
Για τις 2 προαναφερόμενες στατιστικές σειρές δεδομένων:

95	97	100	103	105
50	75	100	125	150

που όπως είδαμε έχουν την ίδια μέση τιμή μ και ίδια διάμεσο δ (μ=δ=100), έχουν διακύμανση αντίστοιχα:

$$V_1 = \sigma_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \tfrac{1}{5}[(95-100)^2 + (97-100)^2 + (100-100)^2 + (103-100)^2 + (105-100)^2]$$

$$= \frac{25+9+0+9+25}{5} = 13.60, \quad \text{(ενώ έχει τυπική απόκλιση } \sigma_1 = \sqrt{V_1} = 3.69\text{)},$$

και όμοια

$$V_2 = \sigma_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \tfrac{1}{5}[(50-100)^2 + (75-100)^2 + (100-100)^2 + (125-100)^2 + (150-100)^2]$$

$$= \frac{6250}{5} = 1250, \quad \text{(ενώ έχει τυπική απόκλιση } \sigma_2 = \sqrt{V_2} = 33.36\text{)}.$$

Ας σημειωθεί ότι, η σχέση μεταξύ των τυπικών αποκλίσεων σ_1 και σ_2 των δύο παραπάνω στατιστικών σειρών είναι πρακτικά ανάλογη των μέσων απόλυτων αποκλίσεων ε_1 και ε_2, αφού $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{3.69}{33.36} = 0.11$ και $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{3.2}{30} = 0.106$.

Άρα, η 1^{η} στατιστική σειρά δεδομένων με $V_1 = \sigma_1{}^2 = 13.60$ έχει προφανώς μεγαλύτερη συκεντρωτικότητα των τιμών της γύρω από τον μέσο μ=100, από ότι η 2^{η} στατιστική σειρά με $V_2 = \sigma_2{}^2 = 1250$ ως προς τον ίδιο μέσο μ=100.

Ιδιότητες της διακύμανσης (διασποράς)

1) Από τους προηγούμενους τύπους (9) και (10) αποδεικνύεται ότι προκύπτουν αντίστοιχα, οι ισοδύναμοι τύποι:

$$V(X) = \sigma^2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \mu^2, \qquad \textbf{(12)}$$

$$V(X) = \sigma^2(X) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} f_i}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)^2 - \mu^2, \qquad \textbf{(13)}$$

Στην πράξη, για τον υπολογισμό της διακύμανσης συνήθως χρησιμοποιούμε τους παραπάνω τύπους (12) και (13),
ενώ όπως ήδη γνωρίζουμε από την Πιθανοθεωρία ισοδύναμα έχουμε:

$$V(X) = \sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2, \qquad (\text{όπου } E(X) = \mu).$$

2) Από τον ορισμό της διακύμανσης (διασποράς)-τύποι (9), (10), διαπιστώνουμε ότι η διακύμανση ως άθροισμα τετραγώνων είναι πάντα μη-αρνητική ποσότητα.

3) Αν οι μεταβλητές X και Y συνδέονται με τη γραμμική σχέση, Y=κ+λX, (κ,λ=σταθ.)$\in \mathbb{R}$, τότε και οι διακυμάνσεις τους $\sigma_X{}^2$, $\sigma_Y{}^2$, αντίστοιχα, συνδέονται ως εξής: $\sigma_Y{}^2 = \lambda^2\sigma_X{}^2$, δηλ. $\sigma_Y{}^2 = \sigma^2(Y) = \sigma^2(\kappa + \lambda X) = \lambda^2\sigma^2(X)$.

4) Αν λ=(σταθ.) $\in \mathbb{R}$ τότε, $\sigma^2(\lambda X) = \lambda^2\sigma^2(X)$ και $\sigma^2(\lambda) = 0$.

Παρατηρήσεις

1) Η τυπική απόκλιση $\sqrt{V(X)} = \sigma(X)$, όπως και η μέση απόλυτη απόκλιση $\varepsilon = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$, έχουν το πλεονέκτημα να μετρώνται στις ίδιες μονάδες που μετράται και η μεταβλητή X, πράγμα που δεν ισχύει προφανώς για τη διακύμανση (διασπορά), $V(X) = \sigma^2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$, αφού οι αποκλίσεις $(x_i - \mu)$ υψώνονται στο τετράγωνο.

Συνεπώς η τυπική απόκλιση και η μέση απόλυτη απόκλιση, χρησιμεύουν για συγκρίσεις μεταξύ ***ομοειδών πληθυσμών***, εφόσον βέβαια οι μεταβλητές μετρώνται στις ίδιες μονάδες μέτρησης. Φυσικά, αν η τυπική απόκλιση μιας μεταβλητής Χ είναι 3 μέτρα και μιας άλλης μεταβλητής Υ είναι 15 κιλά, τότε βέβαια δεν μπορεί να γίνεται λόγος για καμιά σύγκριση μεταξύ τους (ανομοειδείς πληθυσμοί).

Έτσι, για 2 ομοειδείς πληθυσμούς-στατιστικές σειρές δεδομένων, η πιο διασπαρμένη είναι αυτή που έχει μεγαλύτερη τυπική απόκλιση. Ειδικά για τις μεταβλητές που ακολουθούν τη σημαντικότερη κατανομή της Πιθανοθεωρίας, δηλ. την Κανονική κατανομή (ή κατανομή Gauss), ας σημειωθεί ότι:
το 68% περίπου των τιμών της Χ βρίσκονται στο διάστημα (μ-σ,μ+σ),
το 95.5% βρίσκονται στο διάστημα (μ-2σ,μ+2σ), και
το 99.7% των τιμών της Χ βρίσκονται στο διάστημα (μ-3σ,μ+3σ).

Άρα γενικά, η τυπική απόκλιση σ είναι το πιο χρήσιμο μέτρο διασποράς.

2) Χρησιμοποιείται επίσης ο λεγόμενος ***συντελεστής μεταβλητότητας,***

$$\kappa = \frac{\sigma}{\mu}, \qquad \text{είτε} \quad \kappa = \frac{\sigma}{\mu}100\,, \qquad \textbf{(14)}$$

που επειδή προφανώς είναι καθαρός αριθμός, έχει το πλεονέκτημα να είναι συγκρίσιμος για όλες τις στατιστικές σειρές.

3) Συχνά είναι χρήσιμο στην πράξη να κάνουμε το γράφημα των ποσοτικών μεταβλητών (όπου μέσω του γραφήματος μπορούμε π.χ. να βρούμε ευκολότερα τη διάμεσο, αφού στο γράφημα των αθροιστικών συχνοτήτων της Χ θα είναι η τετμημένη που αντιστοιχεί σε τεταγμένη ν/2 ή 50).

4) Ονομάζουμε ***επικρατούσα τιμή*** της μεταβλητής Χ, την τιμή της μεταβλητής που έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης. **(15)**

Η επικρατούσα τιμή μπορεί να μην υπάρχει ή κι' αν υπάρχει μπορεί να μην είναι μοναδική.
Στην περίπτωση διακριτής μεταβλητής, η επικρατούσα τιμή βρίσκεται άμεσα από τον πίνακα συχνοτήτων.

3.3. **Ασκήσεις** (στις μονομεταβλητές στατιστικές σειρές)

1) Έστω ότι η κατανομή μιας μεταβλητής X, δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Τιμές της Μεταβλητής X x_i	**Συχνότητα (απόλυτη) f_i**
$x_1=0$	$f_1=12$
$x_2=1$	$f_2=27$
$x_3=2$	$f_3=29$
$x_4=3$	$f_4=19$
$x_5=4$	$f_5=8$
$x_6=5$	$f_6=4$
$x_7=6$	$f_7=1$

Να υπολογιστούν:
α) Ο αριθμητικός μέσος μ.
β) Η διάμεσος δ.
γ) Το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο, (Q_1, Q_3).

Λύση

Καταρχήν σχηματίζουμε τον εξής πίνακα υπολογισμών:

x_i	**f_i**	**$f_i\ x_i$**	**F_i**
0	12	0	12
$Q_1 \leftarrow 1$	27	27	39
$Q_2 \leftarrow 2$	29	58	68
$Q_3 \leftarrow 3$	19	57	87
4	8	32	95
5	4	20	99
6	1	6	100
Σύνολο	100	200	

α) $\mu = \overline{x} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{k=7} f_i} \sum_{i=1}^{k=7} f_i x_i = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_7x_7}{f_1 + f_2 + \ldots + f_7} = \dfrac{0+27+58+57+32+20+6}{12+27+29+19+8+4+1} = \dfrac{200}{100} = 2$.

β) Επειδή ως γνωστόν, η διάμεσος δ είναι μεγαλύτερη απ' τις μισές τιμές της X και μικρότερη απ' τις άλλες μισές, και επειδή εδώ η X είναι διακριτή, άρα:
$\dfrac{\nu}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$, ενώ το 50 βρίσκεται μεταξύ των αθροιστικών συχνοτήτων $F_2=39$ και $F_3=68$, οπότε η δ θα ισούται με την αντίστοιχη τιμή της F_3 δηλ. την $x_3=2$.
Έτσι, $\delta = x_3 = 2$.

γ) Υπενθυμίζεται (βλ. Πιθανοθεωρία) ότι ως τεταρτημόρια μιας κατανομής ορίζονται γενικά οι τρεις παράμετροι Q_1, Q_2, Q_3, τέτοιες ώστε οι τιμές τους να χωρίζουν τις τιμές x_i της μεταβλητής X σε 4 ίσα μέρη.

Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 είναι η τιμή της μεταβλητής που χωρίζει την κατανομή σε 2 ίσα μέρη, έτσι ώστε το 25% της συχνότητας να έχει τιμή μικρότερη του Q_1 και το 75% μεγαλύτερη του Q_1.

Άρα, το Q_1 χωρίζει τη συνολική συχνότητα στο ν/4 και βρίσκεται στη θέση που αντιστοιχεί στο (ν+1)/4, οπότε εδώ,
$(\nu/4)=(100/4)=25$ και $12=F_1<25<F_2=39$, άρα $Q_1=x_2=1$.

Επίσης, το Q_2 θεωρείται ότι ταυτίζεται με τη διάμεσο δ και το Q_3 βρίσκεται στη θέση που αντιστοιχεί στο 3(ν+1)/4.

Οπότε εδώ: $Q_2=\delta=x_3=2$,

ενώ αφού, $\frac{3\nu}{4}=\frac{3(100)}{4}=75 \Rightarrow 68=F_2<75<87=F_4$,

άρα $Q_3=x_4=3$.

Σημείωση:
Μόνον όταν όλες οι παρατηρήσεις είναι απλά δεδομένα, όπως π.χ. $x_1=1$, $x_2=5$, $x_3=2$, $x_4=6$, $x_5=3$, λέμε αμέσως ότι η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση δηλ. $x_5=3$. Σε ταξινομημένα δεδομένα, δηλ. όταν έχουμε συχνότητες f_i, τότε η διάμεσος βρίσκεται όπως στο παραπάνω παράδειγμα, δηλ. είναι το x_i της αθροιστικής συχνότητας F_i, όπου $F_{i-1}<\frac{\nu}{2}<F_i$.

2) Δίνεται ότι η κατανομή μιας μεταβλητής X, έχει ως εξής:

x_i	f_i
0	4
1	7
2	5
3	2
4	2

Να υπολογιστούν:

α) Ο αριθμητικός μέσος μ.
β) Η διάμεσος δ.
γ) Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

Λύση

Καταρχήν σχηματίζουμε τον εξής πίνακα υπολογισμών:

x_i	f_i	$f_i\,x_i$	$f_i\,x_i^{\,2}$	F_i
0	4	0	0	4
1	7	7	7	11
2	5	10	20	16
3	2	6	18	18
4	2	8	32	ν=20
Σύνολα	$\sum f_i = \nu = 20$	$\sum f_i x_i = 31$	$\sum f_i x_i^2 = 77$	

Οπότε:

α) Επειδή εδώ τα δεδομένα είναι ταξινομημένα, ο αριθμητικός μέσος μ είναι,

$$\mu = \overline{x} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k=5} f_i} \sum_{i=1}^{k=5} f_i x_i = \frac{1}{20} 31 = 1.55\,.$$

β) Επειδή ν/2=10, ενώ το 10 βρίσκεται μεταξύ των αθροιστικών συχνοτήτων 4 και 11,

δηλ. $F_1 = 4 < 10 < 11 = F_2$,

άρα η διάμεσος είναι, δ=x_2=1.

γ) Η διακύμανση (ή διασπορά) δίνεται ως γνωστόν πέραν του ορισμού της και από τη σχέση,

$$V(X) = \sigma^2(X) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i)^2 - \mu^2 = \frac{1}{20} 77 - (1.55)^2 = 3.85 - 2.4025 = 1.4475\,.$$

Οπότε η τυπική απόκλιση, που ως γνωστό είναι η θετική τετραγωνική ρίζα της διασποράς V, είναι

$$\sqrt{V(X)} = \sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i)^2 - \mu^2} = \sqrt{1.4475} = 1.20312\,.$$

3) Δίνεται ότι οι τιμές x_i μιας μεταβλητής X, που εκφράζει τη διάμετρο σε mm, 10 κυλινδρικών ηλεκτρονικών ανταλλακτικών, είναι:

1.2, 2.4, 6.0, 7.2, 12.0, 13.2, 16.8, 21.6, 22.8, 25.2 .

Να υπολογιστούν:

α) Ο μέσος $\mu_X = \overline{x}$ και η τυπική απόκλιση σ_X της μεταβλητής X.

β) Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής και συγκεκριμένα θέτοντας $Y = \dfrac{5X - 54}{6}$,

να βρεθεί ο μέσος $\mu_Y = \overline{y}$ και η τυπική απόκλιση σ_Y της νέας μεταβλητής Y.

γ) Με δεδομένες τις τιμές $\overline{y}$ και σ_Y, να ξαναβρεθούν οι στατιστικές παράμετροι $\overline{x}$ και σ_X , με χρήση των αντίστοιχων ιδιοτήτων (μέσου και διασποράς).

Λύση

Καταρχήν σχηματίζουμε τον πίνακα υπολογισμών (όπου εδώ παρατηρούμε ότι οι τιμές της X είναι απλά δεδομένα, δηλ. δεν έχουμε ταξινομημένα δεδομένα), οπότε παίρνουμε τον επόμενο πίνακα:

i	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{x_i^2}$	$y_i = \dfrac{5x_i - 54}{6}$	$\mathbf{y_i^2}$
1	x_1 =1.2	1.44	-8	64
2	x_2 =2.4	4.84	-7	49
3	6.0	36.00	-4	16
4	7.2	51.84	-3	9
5	12.0	144.00	1	1
6	13.2	174.24	2	4
7	16.8	282.24	5	25
8	21.6	466.56	9	81
9	x_9=22.8	519.84	10	100
n=10	x_{10}=25.2	635.04	12	144
Σύνολα	$\sum_{i=1}^{n=10} x_i = 128.4$	$\sum_{i=1}^{n=10} x_i^2 = 2316.04$	$\sum_{i=1}^{n=10} y_i = 17$	$\sum_{i=1}^{n=10} y_i^2 = 493$

Οπότε:

α) Ο μέσος $\mu_X = \overline{x}$ (για απλά δεδομένα) δίνεται ως γνωστόν από τον τύπο,

$$\mu_X = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}(128.4) = 12.84\,.$$

Επίσης η διακύμανση σ_X^2 είναι,

$$\sigma_X^2 = V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \overline{x}^2 = \frac{1}{10}(2316.04) - (12.84)^2 = 231.604 - 164.8656 = 66.7384\,,$$

και επομένως η ζητούμενη τυπική απόκλιση είναι,

$$\sigma_X = \sqrt{66.7384} \cong 8.17\,.$$

β) Αφού $Y = \dfrac{5X-54}{6} = \dfrac{5}{6}X - 9$, τότε σύμφωνα με σχετικές ιδιότητες των μέσων τιμών θα έχουμε:

$$\mu_Y = \frac{5}{6}\mu_X - 9 = \frac{5}{6}(12.84) - 9 = 10.7 - 9 = 1.7\,.$$

Επίσης από σχετική ιδιότητα της διασποράς, όπου $\sigma^2(\lambda X + \kappa) = \lambda^2\sigma^2(X)$, έχουμε:

$$\sigma_Y^2 = \sigma^2(\lambda X + \kappa) = \lambda^2\sigma^2(X) = (\frac{5}{6})^2(66.73) = 46.34 \Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{46.34} \cong 6.81\,.$$

(Ὅμοια, όπως στο α' ερώτημα, μπορούν να υπολογιστούν τα μ_Y, σ_Y μέσω των ποσοτήτων y_i και y_i^2 του παραπάνω πίνακα).

γ) Τέλος, μέσω των ιδιοτήτων των μέσων τιμών και διασποράς (που ήδη χρησιμοποιήσαμε στο β' ερώτημα),
έχουμε,

$$Y = \frac{5X-54}{6} \Leftrightarrow X = \frac{6Y+54}{5} = \frac{6}{5}Y + \frac{54}{5}\,,$$

άρα μπορούμε να ξαναβρούμε ότι:

$$\mu_X = \frac{6}{5}\mu_Y + \frac{54}{5} = \frac{6(1.7)}{5} + \frac{54}{5} = 12.84$$

και

$$\sigma_X^2 = \sigma^2(\lambda Y + \kappa) = \lambda^2\sigma^2(Y) \Leftrightarrow$$

$$\sigma_X^2 = \sigma^2(\frac{6}{5}Y + \frac{54}{5}) = (\frac{6}{5})^2(46.34) = 66.73 \Rightarrow \sigma_X = \sqrt{66.73} \cong 8.17\,.$$

4) Δίνεται η εξής κατανομή:

x_i	f_i
0	1
1	7
2	19
3	15
4	8
5	0
6	0
Άθροισμα	ν=50

Να υπολογιστούν:
Μέση τιμή ($\bar{x}$), Διασπορά (σ_X^2), Τυπική Απόκλιση (σ_X), και

Συντελεστής Μεταβλητότητας ($\kappa = \frac{\sigma_X}{\bar{x}}.100$).

Απάντηση:

$$\bar{x}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i=\frac{1}{50}122=2.44, \qquad \sigma_X^2=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} f_i}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2-\bar{x}^2=\frac{1}{50}346-(2.44)^2=0.97,$$

$$\sigma_X \cong 0.98 \qquad \text{και} \qquad \kappa=\frac{\sigma_X}{\bar{x}}.100=\frac{0.98}{2.44}.100 \cong 40\%.$$

5) Δίνεται η παρακάτω κατανομή μιας μεταβλητής X:

α_{i-1}<X< α_i	x_i	f_i
0-40	20	16
40-80	60	11
80-120	100	10
120-160	140	5
160-200	180	3
200-240	220	2
240-280	260	2
280-320	300	1

Να υπολογιστούν:
Μέση τιμή ($\bar{x}$), Διασπορά (σ_X^2), Τυπική Απόκλιση (σ_X), και

Συντελεστής Μεταβλητότητας ($\kappa = \frac{\sigma_X}{\bar{x}}.100$).

Απάντηση:

$$\bar{x}=89.6, \qquad \sigma_X^2=5342.69, \qquad \sigma_X \cong 73.09 \quad \text{και}$$

$$\kappa=\frac{\sigma_X}{\bar{x}}.100=\frac{73.09}{89.6}.100 \cong 82\%.$$

4. ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Στα προηγούμενα εξετάστηκαν απλές μονομεταβλητές στατιστικές σειρές, δηλ. ενός στατιστικού πληθυσμού που εξετάζεται ως προς μια μεταβλητή.
Όπως ήδη έχει αναφερθεί όμως (βλ. Πιθανοθεωρία), στην πράξη είναι συχνά χρήσιμο να εξεταστεί ένας πληθυσμός όχι μόνο ως προς πολλές μεταβλητές ξεχωριστά, αλλά ως προς δυο ή περισσότερες μεταβλητές ταυτόχρονα.
Δηλ. είναι συχνά σκόπιμο να μελετηθεί ταυτόχρονα π.χ. το ύψος, η ηλικία, το βάρος, κτλ, ενός συνόλου παιδιών, είτε η πίεση και η θερμοκρασία ενός λέβητα, ή το εισόδημα και οι δαπάνες των φορολογουμένων, κτλ.
Έχει δηλ. σημασία συχνά και η πιθανή συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών ως προς τις οποίες μελετάμε έναν πληθυσμό, αφού τα υψηλότερα εισοδήματα δαπανούν συνήθως και περισσότερα, ή οι πολυπληθέστερες οικογένειες κατοικούν και σε μεγαλύτερες κατοικίες, κλπ.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ένας πληθυσμός που εξετάζεται ταυτόχρονα ως προς δύο (ή περισσότερες μεταβλητές) λέγεται *διμεταβλητός (ή πολυμεταβλητός) πληθυσμός*, οπότε μιλάμε για *διμεταβλητές (ή πολυμεταβλητές) στατιστικές σειρές δεδομένων.*
Στο εξής θα ασχοληθούμε μόνο με διμεταβλητές στατιστικές σειρές δεδομένων, (επεκτείνοντας ανάλογα τις έννοιες για πολυμεταβλητές στατιστικές σειρές).

4.1. Παρουσίαση των διμεταβλητών στατιστικών σειρών

Έστω ότι ένας πληθυσμός αποτελείται από οικογένειες και ότι ενδιαφερόμαστε για την ταυτόχρονη εξέταση του αριθμού των μελών της οικογένειας (μεταβλητή Χ) και του αριθμού των δωματίων της κατοικίας τους (μεταβλητή Υ).
Τότε σε κάθε οικογένεια-μονάδα του πληθυσμού, θα αντιστοιχεί ένα ζεύγος φυσικών αριθμών $(x_i, y_i),\ i = 1, 2, ..., n$, όπου n το πλήθος των οικογενειών του πληθυσμού, x_i είναι ο αριθμός των μελών κάθε οικογένειας και y_i ο αντίστοιχος αριθμός δωματίων της ίδιας οικογένειας.
Έστω λοιπόν ότι ο αριθμός των οικογενειών είναι n=50 και ότι τα αριθμητικά δεδομένα $(x_i, y_i),\ i = 1, 2, ..., n{=}50$, είναι:

x_i	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
y_i	1	1	2	1	1	2	2	2	2	2	3	3	4	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3

x_i	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5
y_i	3	3	4	4	4	4	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	4	4	4	4	4	4

Από τα παραπάνω δεδομένα βλέπουμε ότι η μεταβλητή Χ παίρνει τιμές από 1 έως 5, δηλ. οι οικογένειες του πληθυσμού έχουν μέχρι και 5 μέλη, ενώ η μεταβλητή Υ παίρνει τιμές από 1 έως 4, δηλ. οι κατοικίες του πληθυσμού έχουν μέχρι και 4 δωμάτια. Από τα δεδομένα επίσης παρατηρούμε ότι πολλά διατεταγμένα ζεύγη παρατηρήσεων επαναλαμβάνονται, οπότε μπορούν να εκφραστούν απλούστερα με έναν πίνακα συχνοτήτων που λέγεται και ***πίνακας διπλής εισόδου*** ή τετραγωνικός πίνακας. (Η λέξη «τετραγωνικός» χρησιμοποιείται εδώ καταχρηστικά αφού πρόκειται για πίνακες στην ουσία ορθογώνιους, που έχουν την εξής ιδιότητα: το άθροισμα του συνόλου των γραμμών ισούται με το άθροισμα του συνόλου των στηλών του πίνακα).

Οπότε από τα παραπάνω δεδομένα, παίρνουμε τον εξής πίνακα διπλής εισόδου:

Πίνακας Διπλής Εισόδου-(Ι)

X/Y	**1**	**2**	**3**	**4**	**Σύνολα**
1	2	1	-	-	3
2	2	5	3	-	10
3	-	5	9	4	18
4	-	-	3	8	11
5	-	-	2	6	8
Σύνολα	4	11	17	18	50

Η τελευταία γραμμή και η τελευταία στήλη του παραπάνω πίνακα (δηλ. τα «Σύνολα») λέγονται ***περιθωριακές συχνότητες*** και έχουν το ίδιο άθροισμα (50) – που είναι χαρακτηριστικό των πινάκων διπλής εισόδου.

Η πρώτη και η τελευταία στήλη του πίνακα δίνει την κατανομή της X, που λέγεται ***περιθωριακή κατανομή της X*** και είναι η μονομεταβλητή κατανομή των οικογενειών ως προς τον αριθμό μελών και ανεξάρτητα από την κατοικία τους.

Επίσης, η πρώτη και η τελευταία γραμμή του πίνακα δίνει την κατανομή της Y, που λέγεται ***περιθωριακή κατανομή της Y*** και είναι η μονομεταβλητή κατανομή των οικογενειών ως προς τον αριθμό των δωματίων των κατοικιών τους και ανεξάρτητα από τα μέλη τους.

Εξάλλου, η κατανομή που ορίζεται από την πρώτη στήλη και μια οποιαδήποτε άλλη εσωτερική στήλη του πίνακα, λέγεται ***δεσμευμένη κατανομή της μεταβλητής X***.

Π.χ.

Η δεσμευμένη τιμή της X όταν η Y παίρνει τιμή Y=3, δίνει τον αριθμό μελών που μένουν σε τριάρια, δηλ.

Πίνακας-(Ια)

X/Y	**3**
1	0
2	3
3	9
4	3
5	2
Σύνολο	17

που σημαίνει ότι, καμιά οικογένεια με 1 μέλος δεν κατοικεί σε τριάρι, 3 οικογένειες με 2 μέλη κατοικούν σε τριάρι, 9 οικογένειες με 3 μέλη κατοικούν σε τριάρι, κτλ, ενώ συνολικά σε τριάρια κατοικούν 17 οικογένειες.

Όμοια, ορίζεται η ***δεσμευμένη κατανομή της μεταβλητής Υ***, δηλ. από την πρώτη γραμμή και μια οποιαδήποτε άλλη εσωτερική γραμμή του πίνακα διπλής εισόδου (Ι).

Π.χ. Η δεσμευμένη κατανομή της μεταβλητής Υ όταν ήδη η Χ παίρνει την τιμή Χ=2, δίνει τον αριθμό των δωματίων όπου μένουν οι διμελείς οικογένειες, δηλ.

Πίνακας-(Ιβ)

Χ/Υ	**1**	**2**	**3**	**4**	**Σύνολο**
2	2	5	3	0	10

που σημαίνει ότι, 5 διμελείς οικογένειες μένουν σε δυάρι, 3 σε τριάρι, καμιά σε τεσσάρι, κτλ, ενώ το σύνολο των διμελών οικογενειών είναι 10.

Από τον αρχικό Πίνακα Διπλής Εισόδου (Ι), παρατηρούμε ότι εδώ έχουμε 2 περιθωριακές κατανομές (μια ως προς Χ και μια ως προς Υ) και 9 δεσμευμένες κατανομές (4 της Χ και 5 της Υ).

Τέλος, η γενική μορφή (παράσταση) ενός Πίνακα Διπλής Εισόδου, έχει ως εξής:

ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΠΙΝΑΚΑ ΔΙΠΛΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ-(ΙΙ)

(Συμβολική παράσταση των διμεταβλητών κατανομών)

<table>
<tr><th>Υ
Χ</th><th>y_j
x_i</th><th>y_1</th><th>y_2</th><th>…</th><th>y_j</th><th>…</th><th>y_λ</th><th>Περιθωριακή στήλη-συχνότητα ΣΥΝΟΛΑ $f_{i\bullet}$</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Τιμές ή κλάσεις-γραμμές x_i, (i=1,…,κ) της μεταβλητής Χ

και όμοια τιμές-στήλες y_j, (j=1,…,λ) της μεταβλητής Υ</td><td>x_1</td><td>f_{11}</td><td>f_{12}</td><td>…</td><td>f_{1j}</td><td>…</td><td>$f_{1\lambda}$</td><td>$f_{1\bullet}=\sum_{j=1}^{\lambda} f_{1j}$
=άθροισμα 1ης γραμμής</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>f_{21}</td><td>f_{22}</td><td>…</td><td>f_{2j}</td><td>…</td><td>$f_{2\lambda}$</td><td>$f_{2\bullet}=\sum_{j=1}^{\lambda} f_{2j}$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>x_i</td><td>f_{i1}</td><td>f_{i2}</td><td>…</td><td>f_{ij}</td><td>…</td><td>$f_{i\lambda}$</td><td>$f_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>x_κ</td><td>$f_{\kappa 1}$</td><td>$f_{\kappa 2}$</td><td>…</td><td>$f_{\kappa j}$</td><td>…</td><td>$f_{\kappa\lambda}$</td><td>$f_{\kappa\bullet}=\sum_{j=1}^{\lambda} f_{\kappa j}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Περιθωριακή γραμμή-συχνότητα ΣΥΝΟΛΑ $f_{\bullet j}$</td><td>$f_{\bullet 1}=\sum_{i=1}^{\kappa} f_{i1}$
=άθροισμα 1ης στήλης</td><td>$f_{\bullet 2}$
$=\sum_{i=1}^{\kappa} f_{i2}$</td><td>…</td><td>$f_{\bullet j}$
$=\sum_{i=1}^{\kappa} f_{ij}$</td><td>…</td><td>$f_{\bullet\lambda}$
$=\sum_{i=1}^{\kappa} f_{i\lambda}$</td><td>$f_{\bullet\bullet}=\nu$
$=\sum_{j=1}^{\lambda} f_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\kappa} f_{i\bullet}$
ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ</td></tr>
</table>

4.2. Παρατηρήσεις

1) Από τον παραπάνω γενικής μορφής πίνακα διπλής εισόδου (ΙΙ), είναι προφανές ότι, η μεταβλητή Χ παίρνει κ τιμές και η μεταβλητή Υ παίρνει λ τιμές. Στην περίπτωση όπου Χ και Υ είναι συνεχείς ή ποιοτικές μεταβλητές, τότε οι $(x_1, x_2, ..., x_\kappa)$ και $(y_1, y_2, ..., y_\lambda)$ είναι οι κεντρικές τιμές των κλάσεων των συνεχών μεταβλητών ή οι τιμές των ποιοτικών μεταβλητών.

2) Η οποιαδήποτε συχνότητα f_{ij} είναι η διασταύρωση της i γραμμής και της j στήλης, δηλ. είναι η από κοινού συχνότητα της i και j τιμής (ή κλάσης) των μεταβλητών Χ και Υ αντίστοιχα.

Επίσης, η ***περιθωριακή γραμμή*** δίνει το σύνολο-άθροισμα της κάθε στήλης, π.χ.

$$\mathbf{f_{\bullet 1}} = \sum_{i=1}^{\kappa} f_{i1} = f_{11} + f_{21} + ... + f_{\kappa 1} = \textit{(το σύνολο-άθροισμα της } 1^{ης} \textit{ στήλης)},$$

ενώ αντίστοιχα, η ***περιθωριακή στήλη*** δίνει το σύνολο-άθροισμα της κάθε γραμμής, π.χ.

$$\mathbf{f_{1\bullet}} = \sum_{j=1}^{\lambda} f_{1j} = f_{11} + f_{12} + ... + f_{1\lambda} = \textit{(το σύνολο-άθροισμα της } 1^{ης} \textit{ γραμμής)}.$$

3) ***Υπολογισμός Δεσμευμένων μέτρων θέσης-διασποράς, διμεταβλητής στατιστικής σειράς***

Από τον παραπάνω γενικής μορφής πίνακα διπλής εισόδου (ΙΙ), που αναπαριστά την κατανομή 2 μεταβλητών Χ και Υ (ως προς τον ίδιο στατιστικό πληθυσμό), διαπιστώνεται ότι έχει λ δεσμευμένες κατανομές της Χ δοθέντος του Υ (δηλ. όσες είναι και οι στήλες του πίνακα),
ενώ έχει κ δεσμευμένες κατανομές της Υ δοθέντος του Χ (δηλ. όσες είναι και οι γραμμές του πίνακα).

Έτσι (όπως ήδη γνωρίζουμε από την Πιθανοθεωρία), ο δεσμευμένος μέσος της Υ δοθέντος $X=x_i$, συμβολίζεται $E(Y/X=x_i)$ και η δεσμευμένη διασπορά $V(Y/X=x_i)$.
Αντίστοιχα, ο δεσμευμένος μέσος της Χ δοθέντος $Y=y_j$, συμβολίζεται $E(X/Y=y_j)$ και η δεσμευμένη διασπορά $V(X/Y=y_j)$.

Οπότε, μπορούν να εξετάζονται οι δεσμευμένες κατανομές σαν μονομεταβλητές στατιστικές σειρές.

Π.χ.
Η δεσμευμένη κατανομή της Χ δοθέντος ότι Υ=3, του προαναφερόμενου πίνακα δεδομένων (Ι), δίνεται όπως είδαμε από τον πίνακα (Ια),
οπότε για να βρούμε τον δεσμευμένο μέσο $E(X/Y=3)$ και τη δεσμευμένη διασπορά $V(X/Y=3)$, σχηματίζουμε τον εξής πίνακα υπολογισμών:

x_i	f_i /Y=3	$f_i\ x_i$	$f_i\ x_i^2$
1	0	0	0
2	3	6	12
3	9	27	81
4	3	12	48
5	2	10	50
Σύνολα	$17=\sum_{i=1}^{\kappa=5} f_i = \nu$	$55=\sum_{i=1}^{\kappa=5} f_i x_i$	$191=\sum_{i=1}^{\kappa=5} f_i x_i^2$

Οπότε παίρνουμε:

$$E(X/Y=3) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa=5} f_i x_i = \frac{1}{17}(55) = 3.2$$

και

$$V(X/Y=3) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa=5} f_i x_i^2 - [E(X|Y=3)]^2 = \frac{1}{17}(191) - [3.2]^2 = 11.2 - 10.24 = 0.96\ .$$

Όμοια, βρίσκουμε:

E(X/Y=1)=1.5,

E(X/Y=2)=2.4,

E(X/Y=4)=4.1,

κτλ.

4) Υπολογισμός Περιθωριακών (συνολικών) μέτρων θέσης-διασποράς, διμεταβλητής στατιστικής σειράς

Ο υπολογισμός των περιθωριακών μέτρων θέσης (μέσος, διάμεσος, κτλ) και μέτρων διασποράς (διακύμανση, τυπική απόκλιση, κτλ) μιας διμεταβλητής στατιστικής σειράς, γίνεται όπως και στις μονομεταβλητές περιπτώσεις, μόνο που εδώ χρησιμοποιούμε τις περιθωριακές κατανομές.

Π.χ.
Από τον αρχικό Πίνακα Διπλής Εισόδου (Ι), έχουμε:

x_i/y_j	**1**	**2**	**3**	**4**	**Σύνολο ή περιθ. στήλη $f_{i\bullet}$**	$f_{i\bullet}\, x_i$	$f_{i\bullet}\, x_i^2$
1	2	1	0	0	**3**	3	3
2	2	5	3	0	**10**	20	40
3	0	5	9	4	**18**	54	162
4	0	0	3	8	**11**	44	176
5	0	0	2	6	**8**	40	200
Σύνολο ή περιθ. γραμμή $f_{\bullet j}$	**4**	**11**	**17**	**18**	$f_{\bullet\bullet}=\nu=50$	**161**	**581**
$f_{\bullet j}\, y_j$	4	22	51	72	**149**		
$f_{\bullet j}\, y_j^2$	4	44	153	288	**489**		

Ο περιθωριακός (συνολικός) μέσος της μεταβλητής Χ είναι:

$$E(X) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa=5} f_{i\bullet} x_i = \frac{1}{50}(161) = 3.22 \ ,$$

δηλ. ο μέσος όρος των μελών όλων των οικογενειών του δείγματος (ανεξάρτητα απ' το μέγεθος κατοικίας) είναι, Ε(Χ)=3.22 μέλη.

Επίσης η διακύμανση της Χ είναι:

$$V(X) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa=5} f_{i\bullet} x_i^2 - [E(X)]^2 = \frac{1}{50}(581) - [3.22]^2 = 1.25 \, .$$

Όμοια βρίσκουμε, ότι ο περιθωριακός (συνολικός) μέσος της μεταβλητής Y είναι:

$$E(Y)=\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{4} f_{\bullet j} y_j=\frac{1}{50}(149)=2.98$$

δηλ. ο μέσος όρος των 50 κατοικιών του δείγματος (ανεξάρτητα από τα μέλη των οικογενειών) είναι, E(Y)=2.98 δωμάτια.

Επίσης η διακύμανση της Y είναι:

$$V(Y)=\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{4} f_{\bullet j} y_j^2-[E(Y)]^2=\frac{1}{50}(149)-[2.98]^2=0.90\,.$$

Συμπέρασμα

Άρα, τα περιθωριακά μέτρα θέσης-διασποράς, όπως και τα δεσμευμένα μέτρα θέσης-διασποράς,
υπολογίζονται όπως και στη μονομεταβλητή περίπτωση, χρησιμοποιώντας όμως τις περιθωριακές ή δεσμευμένες κατανομές για κάθε μεταβλητή, αντίστοιχα.

5) Ανεξάρτητες και Εξαρτημένες μεταβλητές

Δύο μεταβλητές X και Y, του ίδιου πληθυσμού λέγονται ανεξάρτητες, όταν οι τιμές της μιας δεν επηρεάζουν τις τιμές της άλλης μεταβλητής. Άλλως λέγονται εξαρτημένες μεταβλητές (βλ. και αντίστοιχη ενότητα στην Πιθανοθεωρία).
Π.χ.
Το βάρος ενός ανθρώπου είναι φυσικό να δεχτούμε ότι δεν εξαρτάται από το χρώμα του αυτοκινήτου του, ή ότι το εισόδημα ενός εργαζομένου δεν εξαρτάται από το ανάστημά του, δηλ. είναι ανεξάρτητες μεταβλητές.
Αντίθετα όμως, οι μεταβλητές «εισόδημα» και «δαπάνες» μιας οικογένειας, ή «κόστος» και «κυβισμός» αυτοκινήτου, είναι εξαρτημένες μεταβλητές.

Σχετικά ισχύει ότι:
Αν δυο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, τότε οι δεσμευμένες κατανομές της X ταυτίζονται μεταξύ τους, όπως και οι δεσμευμένες κατανομές της Y μεταξύ τους, δηλαδή ισχύει:

$$E(X/Y=y_1)= E(X/Y=y_2)=\ldots= E(X/Y=y_\kappa)=E(Y) \tag{16}$$

και

$$V(X/Y=y_1)= V(X/Y=y_2)=\ldots= V(X/Y=y_\kappa)=V(Y), \tag{17}$$

και όμοια, σχετικά με τις δεσμευμένες κατανομές της Y.

Εξάλλου, αν 2 μεταβλητές X,Y είναι ανεξάρτητες, τότε γνωρίζοντας μόνο τις περιθωριακές (συνολικές) συχνότητες, μπορούμε να βρούμε τις (απόλυτες) συχνότητες, μέσω της σχέσης:

$$f_{ij} = \frac{(f_{i\bullet})(f_{\bullet j})}{f_{\bullet\bullet}} \tag{18}$$

όπου i είναι το πλήθος των γραμμών και j το πλήθος των στηλών.

Π.χ.
Με δεδομένο ότι οι μεταβλητές X,Y είναι ανεξάρτητες, να υπολογιστούν οι (απόλυτες) συχνότητες του παρακάτω πίνακα (όπου δίνονται οι περιθωριακές συχνότητες):

X (ανάστημα)	**Y (εισόδημα)**				
	60	**70**	**80**	**90**	**Σύνολο ή περιθ. στήλη $f_{i\bullet}$**
165					**60**
175					**90**
185					**50**
Σύνολο ή περιθ. γραμμή $f_{\bullet j}$	**20**	**60**	**80**	**40**	**200**

Λύση

Αφού οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες θα ισχύει ο τύπος (18), οπότε:

$$f_{11} = \frac{(f_{1\bullet})(f_{\bullet 1})}{f_{\bullet\bullet}} = \frac{(60)(20)}{200} = 6, \quad f_{12} = \frac{(f_{1\bullet})(f_{\bullet 2})}{f_{\bullet\bullet}} = \frac{(60)(60)}{200} = 18, \quad f_{13} = \frac{(f_{1\bullet})(f_{\bullet 3})}{f_{\bullet\bullet}} = \frac{(80)(60)}{200} = 24$$

$$f_{14} = \frac{(f_{1\bullet})(f_{\bullet 4})}{f_{\bullet\bullet}} = \frac{(60)(40)}{200} = 12, \quad f_{21} = \frac{(f_{2\bullet})(f_{\bullet 1})}{f_{\bullet\bullet}} = \frac{(90)(20)}{200} = 9, \quad \text{κτλ.}$$

Οπότε, ο πλήρης πίνακας συχνοτήτων του παραπάνω πίνακα, είναι:

X (ανάστημα)	**Y (εισόδημα)**				
	60	**70**	**80**	**90**	**Σύνολο ή περιθ. στήλη $f_{i\bullet}$**
165	6	18	24	12	**60**
175	9	27	36	18	**90**
185	5	15	20	10	**50**
Σύνολο ή περιθ. γραμμή $f_{\bullet j}$	**20**	**60**	**80**	**40**	**200**

Σημείωση:
Συνήθως στην πράξη, οι τιμές των συχνοτήτων αποκλίνουν λίγο από αυτές που βρίσκουμε από τον τύπο (18). Η μεγάλη όμως απόκλιση μεταξύ πρακτικών και θεωρητικών τιμών των συχνοτήτων, σημαίνει ότι οι μεταβλητές είναι εξαρτημένες (απ' όπου και το σημαντικό τεστ ανεξαρτησίας I^2).

4.3. Συσχέτιση διμεταβλητών πληθυσμών

Γνωρίσαμε ήδη, ότι η εξέταση ενός στατιστικού πληθυσμού ως προς 2 χαρακτηριστικά του ταυτόχρονα, μας οδηγεί σε πίνακες Διπλής Εισόδου, όπου γίνεται η καταγραφή των στατιστικών στοιχείων-δεδομένων του πληθυσμού ως προς 2 μεταβλητές X και Y.
Προφανώς, βασικός στόχος μιας στατιστικής έρευνας είναι η σύγκριση των στατιστικών στοιχείων των 2 μεταβλητών, με τελικό σκοπό την εύρεση κάποιας σχέσης-νόμου που να συνδέει τα στοιχεία αυτής της έρευνας.
Για να γίνει όμως σύγκριση και να αναζητηθεί η νομοτέλεια ή συσχέτιση που ενδεχομένως υφίσταται μεταξύ των 2 μεταβλητών X και Y,
δηλ. για να βρεθούν οι ομοιότητες ή διαφορές που διέπουν ενδεχομένως τα στοιχεία των μεταβλητών και να αναδειχθούν οι τυχόν σχέσεις εξάρτησής τους,
αναγκαία προϋπόθεση είναι τα στοιχεία των μεταβλητών να επιδέχονται σύγκριση, δηλ. να μπορούν να συσχετίζονται μεταξύ τους.

Συνεπώς, η αναζήτηση κάποιας σχέσης μεταξύ 2 μεταβλητών X και Y και μάλιστα η «μαθηματικοποίηση» αυτής της σχέσης (δηλ. η διατύπωσή της σε μαθηματική μορφή, π.χ. υπό μορφή εξίσωσης ή συνάρτησης ως προς X και Y), μας οδηγεί να ακολουθούμε συνήθως την παρακάτω διαδικασία.

4.3.1. ***Συνδιασπορά*** (2 μεταβλητών X και Y)

Καταρχήν, γίνεται συλλογή στοιχείων των 2 μεταβλητών X και Y, με αντίστοιχες συνήθως τιμές (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., n$.
Κατόπιν απεικονίζουμε τα διατεταγμένα ζεύγη (x_1, y_1), $(x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$, ως σημεία σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων, οπότε παίρνουμε ένα σύνολο διασπαρμένων σημείων που λέγεται και ***νέφος σημείων ή διάγραμμα διασποράς***.
Από το διάγραμμα διασποράς, μπορούμε συνήθως να αποφανθούμε για την αλληλεξάρτηση των 2 μεταβλητών X και Y, όπως επίσης και να σχεδιάσουμε μια καμπύλη που να περνά προσεγγιστικά *πιο κοντά* στα σημεία του νέφους, που λέγεται και ***προσεγγιστική καμπύλη ή γραμμή παλινδρόμησης***.

Εκτός όμως από την προσέγγιση του νέφους σημείων από την καταλληλότερη γραμμή παλινδρόμησης, είναι παράλληλα σκόπιμο να εξετάζεται και ο βαθμός συνάφειας ή αλληλεξάρτησης των X και Y στον ερευνώμενο πληθυσμό, πράγμα που γίνεται μέσω των εννοιών της ***συνδιασποράς*** και του ***συντελεστή συσχέτισης*** των 2 μεταβλητών X και Y .

Π.χ.
Ο βαθμός συσχέτισης σε ένα σύνολο εργαζομένων, μεταξύ των μεταβλητών X(μηνιαία έσοδα) και Y(μηνιαίες δαπάνες), πρέπει φυσιολογικά να είναι έντονος,
ενώ μεταξύ της μεταβλητής X(χρώμα ματιών) και της Y(ανάστημα) πρέπει να είναι πολύ χαμηλός μέχρι μηδενικός.

Πιο συγκεκριμένα (όπως ήδη είναι γνωστό από την αντίστοιχη ενότητα στην Πιθανοθεωρία), υπενθυμίζουμε:

Ονομάζουμε ***συνδιασπορά*** ή ***συνδιακύμανση*** δύο μεταβλητών X, Y, την ποσότητα,

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\nu}\displaystyle\sum_i (x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y), & \text{(για απλά δεδομένα)}\\ \dfrac{1}{f_{\bullet\bullet}}\displaystyle\sum_i\sum_j f_{ij}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y), & \text{(για ταξινομημένα δεδομένα)}\end{cases} \qquad \textbf{(19)}$$

Παρατηρήσεις (στη συνδιασπορά)

1) Όταν οι μεταβλητές X και Y συμμεταβάλλονται (συναυξάνουν ή συνελλατώνονται), τότε από τον τύπο (19) οι διαφορές $(x_i-\mu_X)$ και $(y_i-\mu_Y)$ είναι κατά κανόνα ομόσημες, άρα το γινόμενό τους $(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)$ είναι θετικό, οπότε και η συνδιασπορά τους είναι συνήθως θετική. Άλλως, αν μεταβάλλονται αντίρροπα, τότε η συνδιασπορά τους είναι συνήθως αρνητική.

Δηλ. κατά κανόνα, ισχύει:

[Cov(X,Y)>0] $\Leftrightarrow$ [X,Y, μεταβάλλονται ομόρροπα],

[Cov(X,Y)<0] $\Leftrightarrow$ [X,Y, μεταβάλλονται αντίρροπα], **(20)**

[Cov(X,Y)=0] $\Leftrightarrow$ [X,Y, είναι ασυσχέτιστες].

2) Η συνδιασπορά (ή συνδιακύμανση) παίζει στις διμεταβλητές στατιστικές σειρές, ένα ρόλο ανάλογο της διασποράς στις μονομεταβλητές σειρές.
Πράγματι, θέτοντας στις σχέσεις (19), x=y, τότε ξαναβρίσκουμε τον τύπο της διασποράς V.

3) Ισχύουν οι ακόλουθες ***ιδιότητες της συνδιασποράς***:

α) **Cov(X,Y)=Cov(Y,X).**

Πράγματι, από τη σχέση (19α)-για απλά δεδομένα, έχουμε,

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{\nu}\sum_i (x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)=\frac{1}{\nu}\sum_i (y_i-\mu_Y)(x_i-\mu_X)=\mathrm{Cov}(Y,X),$$

(και όμοια για ταξινομημένα δεδομένα).

β) **Cov(X,X)=V(X).**

Πράγματι, από τη σχέση (19α) θέτοντας Y=X, παίρνουμε,

$$\mathrm{Cov}(X,X)=\frac{1}{\nu}\sum_i (x_i-\mu_X)(x_i-\mu_X)=\frac{1}{\nu}\sum_i (x_i-\mu_X)^2=V(X)=\sigma_X^{\,2}.$$

γ) **Cov(a+bx, c+dy)=bdCov(X,Y).**

δ) Συνήθως για τον υπολογισμό της συνδιασποράς αντί των παραπάνω τύπων (19) του ορισμού της, που παρουσιάζουν στην πράξη λογιστικές δυσκολίες, χρησιμοποιούμε τις παρακάτω γενικότερες και ισοδύναμες σχέσεις:

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\nu}\left[\sum_i x_i y_i-\dfrac{\sum_i x_i\sum_i y_i}{\nu}\right]=\dfrac{1}{\nu}\sum_i x_i y_i-\mu_X\mu_Y, & \text{(για απλά δεδομένα)}\\[2ex] \dfrac{1}{f_{\bullet\bullet}}\left[\sum_i\sum_j f_{ij}x_i y_j-\dfrac{\sum_i (f_{i\bullet})x_i\sum_i (f_{\bullet j})y_j}{f_{\bullet\bullet}}\right], & \text{(για ταξινομημένα δεδομένα)}\end{cases} \qquad \textbf{(21)}$$

4.3.2. Συντελεστής Γραμμικής Συσχέτισης *(2 μεταβλητών X και Y)*

Η συνδιασπορά Cov(X,Y), όπως ήδη γνωρίζουμε από την αντίστοιχη ενότητα στην Ποθανοθεωρία, παρουσιάζει προφανώς ανάλογα μειονεκτήματα με αυτά της διασποράς V(X), δηλ. δεν είναι απαλλαγμένη από τις μονάδες μέτρησης.

Επίσης η αξιολόγηση του βαθμού αλληλεξάρτησης 2 μεταβλητών, μόνον με τη πληροφορία του μεγέθους της συνδιασποράς, είναι συνήθως αδύνατη εκτός της περίπτωσης που είναι Cov(X,Y)=0.

Για το λόγο αυτό δημιουργείται ένα νέο μέγεθος, απαλλαγμένο από τα μειονεκτήματα της συνδιασποράς, που λέγεται ***συντελεστής γραμμικής συσχέτισης***, είναι καθαρός αριθμός και ορίζεται, ως γνωστόν, ως εξής:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum_i (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_i (x_i - \mu_X)^2}\sqrt{\sum_i (y_i - \mu_Y)^2}}, \qquad \textbf{(22)}$$

Για τους υπολογισμούς στις εφαρμογές συνήθως χρησιμοποιούνται ισοδύναμα οι παρακάτω τύποι:

$$\rho_{XY} = \frac{\sum_i x_i y_i - \frac{\sum_i x_i \sum_i y_i}{\nu}}{\sqrt{\sum_i x_i^2 - \frac{(\sum_i x_i)^2}{\nu}}\sqrt{\sum_i y_i^2 - \frac{(\sum_i y_i)^2}{\nu}}}, \text{ (απλά δεδομένα)}$$

$$\textbf{(23)}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\sum_i \sum_j f_{ij} x_i y_j - \frac{\sum_i (f_{i\bullet}) x_i \sum_i (f_{\bullet j}) y_j}{\nu}}{\sqrt{\sum_i (f_{i\bullet}) x_i^2 - \frac{(\sum_i (f_{i\bullet}) x_i)^2}{f_{\bullet\bullet}}}\sqrt{\sum_i (f_{\bullet j}) y_j^2 - \frac{(\sum_i (f_{\bullet j}) y_j)^2}{f_{\bullet\bullet}}}}, \text{ (ταξιν. δεδομένα)}$$

Παρατηρήσεις *(στο συντελεστή γραμμικής συσχέτισης)*

1) Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης 2 μεταβλητών X και Y, είναι απλός αδιάστατος αριθμός, απαλλαγμένος από μονάδες μέτρησης, δηλ. είναι ένας αριθμητικός δείκτης της έντασης αλληλεξάρτησής τους.
Αποδεικνύεται (όπως ήδη είναι γνωστό) ότι παίρνει τιμές μεταξύ -1 και 1, δηλ $\rho_{XY} \in [-1,1]$ και μπορεί να ερμηνευτεί ως ο μέσος όρος των «συμφωνιών» ή «διαφωνιών» μεταξύ των μεταβλητών X και Y.

Π.χ.

Αν X είναι η βαθμολογία στα Ελληνικά (μιας τάξης μαθητών) και Y είναι η βαθμολογία στα Μαθηματικά, τότε:
αν $\rho_{XY}=0.95$, αυτό σημαίνει ότι οι βαθμοί των μαθητών σμβαδίζουν κατά πολύ στα 2 μαθήματα, ενώ αν $\rho_{XY}=-0.95$ αυτό σημαίνει ότι οι καλοί στα Ελληνικά είναι κακοί στα Μαθηματικά και αντίστροφα.

2) Η ύπαρξη οποιασδήποτε συσχέτισης μεταξύ 2 μεταβλητών X και Y, δεν σημαίνει και αιτιώδη εξάρτηση μεταξύ τους.
Δηλ. η επίδοση ενός μαθητή στα Μαθηματικά δεν εξαρτάται από την επίδοσή του στα Ελληνικά και αντιστρόφως.

Η ύπαρξη λοιπόν σχέσης μεταξύ 2 μεταβλητών X και Y είναι τόσο μεγαλύτερη όσο ο ρ_{XY} πλησιάζει προς το $|1|$, (δηλ. προς το -1 ή +1),
ενώ είναι τόσο μικρότερη όσο ρ_{XY} πλησιάζει προς το 0.

Συμπερασματικά:

$[\rho_{XY} \cong 1] \Rightarrow$ [ισχυρή συσχέτιση, θετική],

$[\rho_{XY} \cong -1] \Rightarrow$ [ισχυρή συσχέτιση, αρνητική],

$[\rho_{XY} \cong 0] \Rightarrow$ [X και Y ασυσχέτιστες]. **(24)**

3) Τέλος ας σημειωθεί, ότι ισχυρή συσχέτιση μεταξύ 2 μεταβλητών δεν σημαίνει ότι υπάρχει και αιτιώδης-λογική εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών. Αλλά και δεν την αποκλείει.
Συνήθως, η ισχυρή συσχέτιση μεταξύ 2 παραγόντων-μεταβλητών, αν δεν σημαίνει και άμεση-λογική εξάρτησή τους, τότε υποδηλώνει την εξάρτησή τους από κάποιον κοινό τρίτο παράγοντα ή παράγοντες.

4.4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ (στους διμεταβλητούς πληθυσμούς)

1) Δίνεται ο παρακάτω πίνακας διπλής εισόδου, που καταγράφει την κατανομή της απόστασης Y (σε m) που διανύουν 200 αυτοκίνητα μετά από άμεσο φρενάρισμα, ως προς την ταχύτητα X (σε Km/h) του αυτοκινήτου.

Y=απόσταση y_j (j=1,…,5) / **X**=ταχύτητα x_i (i=1,..,5)		[20,30) $y_1=25$	[30,40) $y_2=35$	[40,60) $y_3=50$	[60,80) $y_4=70$	[80,120) $y_5=90$
[70,80)	$x_1=75$	3 f_{11}	25 f_{12}	13 f_{13}	6 f_{14}	0 f_{15}
[80,90)	$x_2=85$	0 f_{21}	5 f_{22}	29 f_{23}	12 f_{24}	2 f_{25}
[90,100)	$x_3=95$	0 f_{31}	0 f_{32}	24 f_{33}	21 f_{34}	10 f_{35}
[100,110)	$x_4=105$	0 f_{41}	0 f_{42}	12 f_{43}	12 f_{44}	16 f_{45}
[110,120)	$x_5=115$	0 f_{51}	0 f_{52}	0 f_{53}	5 f_{54}	5 f_{55}

Να υπολογιστούν:

α) Όλοι οι δεσμευμένοι μέσοι της X ως προς Y, δηλ. $E(X/Y=y_j)$,
καθώς και όλοι οι δεσμευμένοι μέσοι της Y ως προς X, δηλ. $E(Y/X=x_i)$.

β) Οι δεσμευμένες διακυμάνσεις $V(X/Y=y_2)$ και $V(Y/X=x_5)$.

γ) Οι περιθωριακοί (συνολικοί) μέσοι του διμεταβλητού πληθυσμού (X,Y), δηλ. ισοδύναμα οι μέσοι $E(X)=\mu_x$ και $E(Y)=\mu_y$, των μεταβλητών X και Y αντίστοιχα, καθώς και οι τυπικές αποκλίσεις τους σ_x και σ_y .

δ) Τέλος, να δοθούν τα γραφήματα των:
δεσμευμένων μέσων $E(X/Y=y_j)$ και $E(Y/X=x_i)$,
καθώς και των περιθωριακών μέσων $E(X)=\mu_x$ και $E(Y)=\mu_y$.

Λύση

Καταρχήν από τον δοθέντα πίνακα διπλής εισόδου διαπιστώνουμε ότι, η μεταβλητή X (ταχύτητα, σε Km/h) χωρίζεται σε 5 κλάσεις:
[70,80), [80,90), [90,100), [100,110), [110,120),
με αντίστοιχες κεντρικές τιμές, 75, 85, 95, 105, 115.

Όμοια, η μεταβλητή Y (απόσταση, σε m) χωρίζεται επίσης σε 5 κλάσεις:
[20,30), [30,40), [40,60), [60,80), [80,100),

με αντίστοιχες κεντρικές τιμές, 25, 35, 50, 70, 90.
Ακολούθως για τις ανάγκες των υπολογισμών που απαιτούνται για την εύρεση των μεγεθών που μας ζητούνται, δημιουργούμε τον ακόλουθο γενικό πίνακα υπολογισμών:

Y=απόσταση **y_j** (j=1,…,5) / **X**=ταχύτητα **x_i** (i=1,..,5)		[20,30) **y_1=25**	[30,40) **y_2=35**	[40,60) **y_3=50**	[60,80) **y_4=70**	[80,120) **y_5=90**	**αθρ. i γραμμής** $\sum_{j=1}^{5} f_{ij}$ **$=f_{i\bullet}$** (i=1,..,5)	**$f_{i\bullet}x_i$**	**$f_{i\bullet}x_i^2$**	$\sum_{j=1}^{5} f_{ij}y_j$ (i=1,..,5)
[70,80)	**x_1=75**	3 f_{11}	25 f_{12}	13 f_{13}	6 f_{14}	0 f_{15}	**47**	**3525**	**264375**	**2020**
[80,90)	**x_2=85**	0 f_{21}	5 f_{22}	29 f_{23}	12 f_{24}	2 f_{25}	**48**	**4080**	**346800**	**2645**
[90,100)	**x_3=95**	0 f_{31}	0 f_{32}	24 f_{33}	21 f_{34}	10 f_{35}	**55**	**5225**	**496375**	**3570**
[100,110)	**x_4=105**	0 f_{41}	0 f_{42}	12 f_{43}	12 f_{44}	16 f_{45}	**40**	**4200**	**441000**	**2880**
[110,120)	**x_5=115**	0 f_{51}	0 f_{52}	0 f_{53}	5 f_{54}	5 f_{55}	**10**	**1150**	**135250**	**800**
άθροισμα j στήλης $\sum_{i=1}^{5} f_{ij} =$ **$f_{\bullet j}$** (j=1,…,5)		**3**	**30**	**78**	**56**	**33**	**ν=200**	**18180**	**1683800**	
$f_{\bullet j}y_j$		**75**	**1050**	**3900**	**3920**	**2970**	**11915**			
$f_{\bullet j}y_j^2$		**1875**	**36750**	**195000**	**274400**	**267300**	**775325**			
$\sum_{i=1}^{5} f_{ij}x_i$ (j=1,…,5)		**225** $\sum_{i=1}^{5} f_{i1}x_i$	**2300** $\sum_{i=1}^{5} f_{i2}x_i$	**6980** $\sum_{i=1}^{5} f_{i3}x_i$	**5300** $\sum_{i=1}^{5} f_{i4}x_i$	**3375** $\sum_{i=1}^{5} f_{i5}x_i$				

α) Προφανώς, αφού ο δοθείς πίνακας διπλής εισόδου είναι τάξης (5x5), θα έχουμε 5 δεσμευμένες κατανομές της X ως προς Y και 5 δεσμευμένες κατανομές της Y ως προς X.

Οπότε, κατά τα γνωστούς τύπους (βλ. 4.2.(3), δεσμευμένος μέσος), παίρνουμε:

$$E(X|Y = y_1 = 25) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{5} f_{i1}} \sum_{i=1}^{5} f_{i1}x_i = \frac{1}{3}(225) = 75,$$

αφού από τον αντίστοιχο πίνακα υπολογισμών έχουμε,

.

x_i	f_{i1} /y_1=25	$f_{i1}x_i$
x_1 =75	3	225
x_2 =85	0	0
x_3 =95	0	0
x_4 =105	0	0
x_5 =115	0	0
άθροισμα	$3=\sum_{i=1}^{\kappa=5} f_{i1} = \nu$	$225=\sum_{i=1}^{\kappa=5} f_{i1}x_i$

Το ανωτέρω αποτέλεσμα $E(X|Y = y_1 = 25) = 75\,(\text{Km/h})$ σημαίνει ότι μετά από απότομο φρενάρισμα σταματάμε σε 25m περίπου (δηλ. μεταξύ 20-30m),
όταν το αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 75(Km/h) κατά μέσο όρο.

Κατά τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε διαδοχικά:

$$E(X|Y = y_2 = 35) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{5} f_{i2}} \sum_{i=1}^{5} f_{i2}x_i = \frac{1}{30}(2300) = 76.67 \cong 77\,,$$

$$E(X|Y = y_3 = 50) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{5} f_{i3}} \sum_{i=1}^{5} f_{i3}x_i = \frac{1}{78}(6980) = 89.49 \cong 90\,,$$

$$E(X|Y = y_4 = 70) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{5} f_{i4}} \sum_{i=1}^{5} f_{i4}x_i = \frac{1}{56}(5300) = 94.64 \cong 95\,,$$

$$E(X|Y = y_5 = 90) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{5} f_{i5}} \sum_{i=1}^{5} f_{i5}x_i = \frac{1}{33}(3375) = 102.27 \cong 102\ .$$

Ανάλογα, για τον δεσμευμένο μέσο της Y, δοθέντος ότι $X=x_1=75$,
βρίσκουμε:

$$E(Y|X = x_1 = 75) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{5} f_{1j}} \sum_{j=1}^{5} f_{1j}y_j = \frac{1}{47}(2020) = 42.98 \cong 43\ (\text{m}),$$

αφού από τον αντίστοιχο πίνακα υπολογισμών έχουμε,

.

y_j	y_1=25	y_2=35	y_3=50	y_4=70	y_5=90	άθροισμα
f_{1j} /x_1=75	3	25	13	6	0	$\sum_{j=1}^{\kappa=5} f_{1j} = 47$
$f_{1j}\, y_1$	75	875	650	420	0	$\sum_{j=1}^{\kappa=5} f_{1j} y_j = 2020$

Το ανωτέρω αποτέλεσμα $E(Y|X = x_1 = 75) = 42.98 \cong 43$ σημαίνει ότι αυτοκίνητο κινούμενο με 75 Km/h περίπου (δηλ. μεταξύ 80-90 Km/h),
θα σταματήσει φρενάροντας σε 43 m (κατά μέσο όρο).

(Η απόκλιση μεταξύ της $E(X|Y = y_1 = 25) = 75$ (Km/h) και της $E(Y|X = x_1 = 75) = 43\,(m)$, οφείλεται στην ακρίβεια των μετρήσεων και την «αποτελεσματικότητα» των 200 παρατηρήσεων του δείγματος).

Κατά τον ίδιο τρόπο, υπολογίζουμε διαδοχικά και τις άλλες 4 δεσμευμένες μέσες τιμές της Y, δοθέντος X, δηλαδή:

$$E(Y|X = x_2 = 85) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{5} f_{2j}} \sum_{j=1}^{5} f_{2j} y_j = \frac{1}{48}(2645) = 55.10 \cong 55,$$

$$E(Y|X = x_3 = 95) = \frac{1}{55}(3570) = 64.91 \cong 65,$$

$$E(Y|X = x_4 = 105) = \frac{1}{40}(2880) = 72,$$

$$E(Y|X = x_5 = 115) = \frac{1}{10}(800) = 80 \ .$$

Έτσι, οι ζητούμενοι δεσμευμένοι μέσοι, συνοπτικά είναι:

y_j	E(X/Y=y_j)	x_i	E(Y/X=x_i)
y_1 =25	75	x_1 =75	43
y_2 =35	77	x_2 =85	55
y_3 =50	90	x_3 =95	65
y_4 =70	95	x_4 =105	72
y_5 =90	102	x_5 =115	80

β) Οι ζητούμενες δεσμευμένες διακυμάνσεις V(X/Y=y_2) και V(Y/X=x_5), είναι:

$$V(X|Y = y_2 = 35) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{5} f_{i2}} \sum_{i=1}^{5} f_{i2} x_i^2 - [E(X|Y = y_2 = 35)]^2 = \frac{1}{30}(176750) - [76.67]^2 =$$

$$= 58.91.67 - 58.78.2i9 \cong 13.38,$$

αφού

x_i	f_{i2}	x_i^2	$f_{i2}x_i^2$
x_1 =75	25	5625	40625
x_2 =85	5	7225	36125
x_3 =95	0	9025	0
x_4 =105	0	11025	0
x_5 =115	0	13225	0
άθροισμα	30		176750 $\sum_{i=1}^{5} f_{i2} x_i^2$

Όμοια, παίρνουμε:

$$V(Y|X = x_5 = 115) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{5} f_{5j}} \sum_{j=1}^{5} f_{5j} y_j^2 - [E(Y|X = x_5 = 115)]^2 = \frac{1}{10}(65000) - [80]^2 =$$

$$= 6500 - 6400 = 100,$$

αφού

y_j	f_{5j}	y_j^2	$f_{5j}y_j^2$
y_1=25	0	625	0
y_2=35	0	1225	0
y_3 =50	0	2500	0
y_4 =70	5	4900	24500
y_1 =90	5	8100	40500
άθροισμα	10		65000 $\sum_{j=1}^{5} f_{5j} y_j^2$

γ) Για να βρούμε τους περιθωριακούς (συνολικούς) μέσους του διμεταβλητού πληθυσμού (X,Y), δηλ. ισοδύναμα τους μέσους $E(X) = \overline{x} = \mu_x$ και $E(Y) = \overline{y} = \mu_y$ των μεταβλητών X και Y αντίστοιχα, σύμφωνα με τους γνωστούς τύπους, έχουμε:

$$E(X) = \overline{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{5} f_{i\bullet} x_i = \frac{1}{200}(18180) = 90.90 \cong 91 \text{ (Km|h)},$$

και

$$E(Y) = \overline{y} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5} f_{\bullet j} y_j = \frac{1}{200}(11915) = 59.58 \cong 60 \text{ (m)}.$$

Επίσης, οι περιθωριακές (συνολικές) διασπορές, είναι:

$$V(X) = \sigma_X^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{5} f_{i\bullet} x_i^2 - (\overline{x})^2 = \frac{1}{200}(1683800) - (90.90)^2 = 156.19,$$

.
και

$$V(Y) = \sigma_Y^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5} f_{\bullet j} y_j^2 - (\overline{y})^2 = \frac{1}{200}(775325) - (59.58)^2 = 327.44.$$

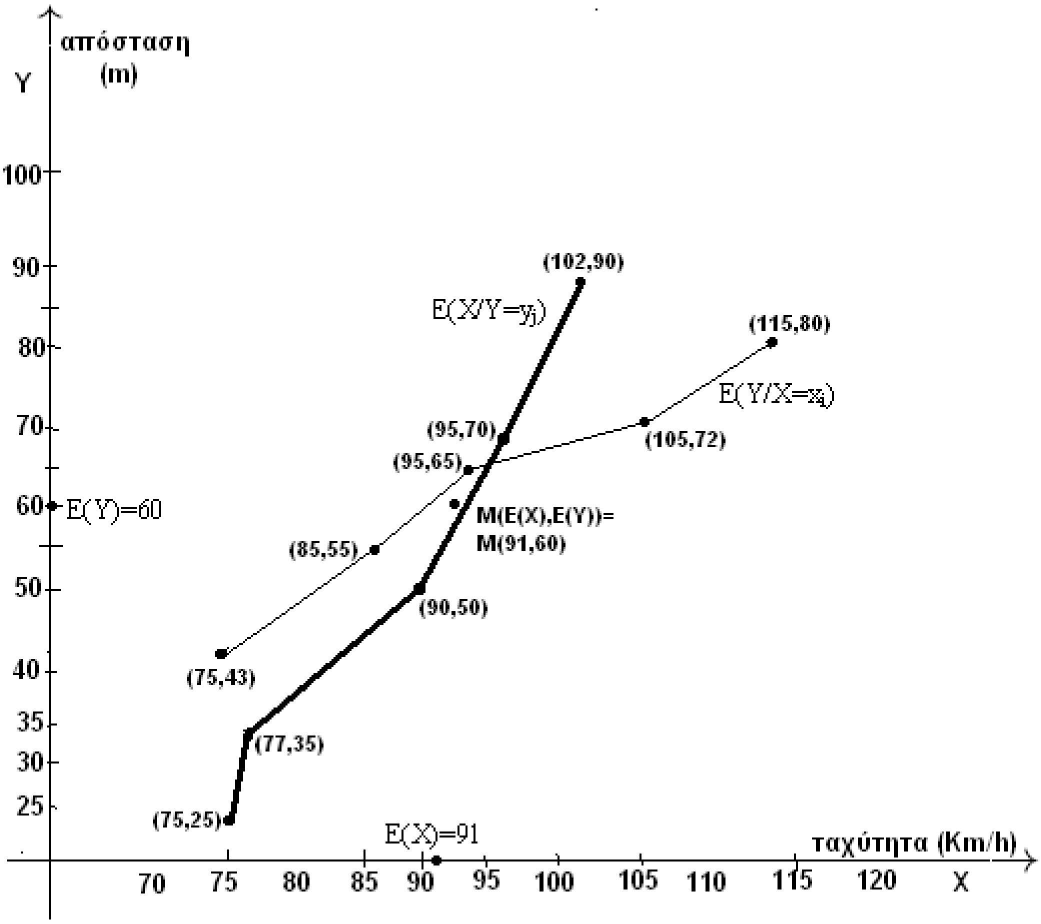
Οπότε, οι περιθωριακές τυπικές αποκλίσεις, είναι:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{156.19} = 12.5 \text{ (Km|h)},$$

και

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{327.44} = 18.1 \text{ (m)}.$$

δ) Τέλος, τα γραφήματα των (5+5=10) δεσμευμένων μέσων $E(X/Y=y_j)$ και $E(Y/X=x_i)$,
καθώς και των περιθωριακών μέσων E(X)=91, E(Y)=60,
είναι ως ακολούθως:



Είναι αξιοσημείωτο στο ανωτέρω γράφημα να παρατηρήσουμε ότι,

το σημείο **M(E(X),E(Y))=M(91,60)** των (περιθωριακών) μέσων E(X) και E(Y) βρίσκεται μεταξύ των τεθλασμένων γραμμών των πέντε δεσμευμένων μέσων της μεταβλητής X δοθέντος του Y, δηλ. $E(X/Y=y_j)$, j=1,…,5 και των πέντε δεσμευμένων μέσων της μεταβλητής Y δοθέντος του X, δηλ. $E(Y/X=x_i)$, i=1,…,5.

2) Να υπολογιστούν οι περιθωριακοί και δεσμευμένοι μέσοι, καθώς και οι περιθωριακές και δεσμευμένες διακυμάνσεις του διμεταβλητού πληθυσμού 200 εργαζομένων, όπως δίνεται από τον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου, που καταγράφει το ανάστημα X (σε cm) και τις εβδομαδιαίες δαπάνες Y (για τρόφιμα, σε ευρώ), των εργαζομένων.

Y = y_j (j=1,2,3,4) / **X = x_i** (i=1,2,3)	**y_1=60**	**y_2=70**	**y_3=80**	**y_4=90**	**Περιθωριακή στήλη, άθροισμα i γραμμής** $\sum_{j=1}^{5} f_{ij} = f_{i\bullet}$ (i=1,2,3)
x_1=165	$f_{11}=6$	$f_{12}=18$	$f_{13}=24$	$f_{14}=12$	**60**
x_2=175	$f_{21}=9$	$f_{22}=27$	$f_{23}=36$	$f_{24}=18$	**90**
x_3=185	$f_{31}=5$	$f_{32}=15$	$f_{33}=20$	$f_{34}=10$	**50**
Περιθωριακή γραμμή, άθροισμα j στήλης $\sum_{i=1}^{3} f_{ij} = f_{\bullet j}$ (j=1,2,3,4)	**20**	**60**	**80**	**40**	**ν=200**

Λύση

Οι Περιθωριακοί μέσοι και περιθωριακές διακυμάνσεις του διμεταβλητού πληθυσμού (X,Y), δηλ. οι μέσοι και οι διακυμάνσεις κάθε μεταβλητής X και Y, κατά τους γνωστούς τύπους, υπολογίζονται ότι είναι:

$$E(X) = \bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{4} f_{i\bullet} x_i = \frac{1}{200}[(60x165) + (90x175) + (50x185)] = \frac{1}{200}[34900] = 174.5$$

και

$$E(Y) = \bar{y} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5} f_{\bullet j} y_j = \frac{1}{200}[(20x60) + (60x70) + (80x80) + (40x90)] = \frac{1}{200}[15400] = 77\,.$$

Όμοια, για τις (περιθωριακές) διακυμάνσεις, βρίσκουμε:

$$V(X) = \sigma_X^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{5} f_{i\bullet} x_i^2 - (\bar{x})^2 = 54.7\,,$$

.

$$V(Y) = \sigma_Y^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5} f_{\bullet j} y_j^2 - (\bar{y})^2 = 81\,.$$

Επίσης, οι δεσμευμένοι μέσοι και οι δεσμευμένες διακυμάνσεις της X δοθείσης της Y, υπολογίζονται κατά τα γνωστά, ότι είναι:

E(X/Y=60)=E(X/Y=70)=E(X/Y=80)=E(X/Y=90)=174.5=E(X)

και

V(X/Y=60)=V(X/Y=70)=V(X/Y=80)=V(X/Y=90)=54.7=V(X),

καθώς και της Y δοθείσης της X,

E(Y/X=165)= E(Y/X=175)= E(Y/X=185)=77=E(Y)

και

V(Y/X=165)= V(Y/X=165)= V(Y/X=165)=81=V(Y).

Δηλαδή, οι δεσμευμένοι μέσοι και οι δεσμευμένες διακυμάνσεις ταυτίζονται με τους αντίστοιχους περιθωριακούς μέσους και περιθωριακές διακυμάνσεις,
επειδή οι μεταβλητές X (ανάστημα) και Y (δαπάνες) των εργαζομένων είναι προφανώς ανεξάρτητες.

3) Να βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης των μεταβλητών X, Y, από τα παρακάτω ζεύγη τιμών τους:

$X=x_i$	0	1	2	4	8
$Y=y_j$	1	2	4	6	10

Λύση
Κατασκευάζουμε καταρχήν, τον εξής πίνακα υπολογισμών:

x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
$x_1=0$	1	0	0	1
$x_2=1$	2	2	1	4
$x_3=2$	4	8	4	16
$x_4=4$	6	24	16	36
$x_5=8$	10	80	64	100
Άθροισμα $\sum_i x_i = \mathbf{15}$	$\sum_i y_i = \mathbf{23}$	$\sum_i x_i y_i = \mathbf{114}$	$\sum_i x_i^2 = \mathbf{85}$	$\sum_i y_i^2 = \mathbf{157}$

Επίσης, $(\sum_i x_i)^2 = (15)^2 = 225$ και $(\sum_i y_i)^2 = (23)^2 = 529$, οπότε ο συντελεστής συσχέτισης των μεταβλητών X, Y, σύμφωνα με τον τύπο (23α) για απλά δεδομένα, , είναι:

$$\rho_{XY} = \frac{\sum_i x_i y_i - \frac{\sum_i x_i \sum_i y_i}{\nu}}{\sqrt{\sum_i x_i^2 - \frac{(\sum_i x_i)^2}{\nu}}\sqrt{\sum_i y_i^2 - \frac{(\sum_i y_i)^2}{\nu}}} = \frac{\nu \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{\sqrt{\nu \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}\sqrt{\nu \sum_i y_i^2 - (\sum_i y_i)^2}} =$$

$$= \frac{5(114) - 15(23)}{\sqrt{5(85) - 225}\sqrt{5(157) - 52(9)}} = \frac{570 - 345}{\sqrt{200(256)}} = \frac{225}{226.27} = 0.9944 \cong 1,$$

πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει ισχυρή συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών X και Y και μάλιστα θετική (ομόρροπη), δηλ. ισχυρή συμφωνία τους.

4) Να βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης του παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου:

Y=y_j (j=1,2,3) / **X=x_i (i=1,2)**	**y_j =1**	**y_j =2**	**y_j =3**
x_1 =0	0	1	2
x_2 =2	2	3	4

Λύση

Κατασκευάζουμε καταρχήν, τον εξής πίνακα υπολογισμών:

Y=y_j (j=1,2,3) / **X=x_i (i=1,2)**	**y_j =1**	**y_2 =2**	**y_3 =3**	**Άθροισμα i γραμμής, περιθωριακή στήλη $f_{i\bullet}$**	**$f_{i\bullet}\, x_i$**	**$f_{i\bullet}\, x_i^2$**
x_1 =0	0	1	2	**3**	0	0
x_2 =2	2	3	4	**9**	18	36
Άθροισμα j στήλης, περιθωριακή γραμμή $f_{\bullet j}$	**2**	**4**	**6**	**ν=$f_{\bullet\bullet}$=12**	**18**	**36**
$f_{\bullet j}\, y_j$	2	8	18	**28**		
$f_{\bullet j}\, y_j^2$	2	16	54	**72**		

Οπότε, ο συντελεστής συσχέτισης των μεταβλητών X, Y, σύμφωνα με τον τύπο (23β) για ταξινομημένα δεδομένα (όπου $\nu=f_{\bullet\bullet}$), είναι:

$$\rho_{XY} = \frac{\sum_i \sum_j f_{ij} x_i y_j - \frac{\sum_i (f_{i\bullet}) x_i \sum_i (f_{\bullet j}) y_j}{\nu}}{\sqrt{\sum_i (f_{i\bullet}) x_i^2 - \frac{(\sum_i (f_{i\bullet}) x_i)^2}{\nu}} \sqrt{\sum_i (f_{\bullet j}) y_j^2 - \frac{(\sum_i (f_{\bullet j}) y_j)^2}{\nu}}} =$$

$$= \frac{\nu \sum_i \sum_j f_{ij} x_i y_j - \sum_i (f_{i\bullet}) x_i \sum_i (f_{\bullet j}) y_j}{\sqrt{\nu \sum_i (f_{i\bullet}) x_i^2 - (\sum_i (f_{i\bullet}) x_i)^2} \sqrt{\nu \sum_i (f_{\bullet j}) y_j^2 - (\sum_i (f_{\bullet j}) y_j)^2}} =$$

$$= \frac{12(40)-18(20)}{\sqrt{12(36)-18^2}\sqrt{12(72)-28^2}} = \frac{480-504}{\sqrt{432-324}\sqrt{864-784}} = \frac{-24}{\sqrt{108-80}} = -0.258.$$

Πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει ασθενής αρνητική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών X και Y, (δηλ. μικρή διαφωνία μεταξύ τους).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ
(ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ)

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

- ***Ρούσσας Γ.,*** *Θεωρία Πιθανοτήτων, (Α' Έκδοση, Πάτρα 1973), Εκδόσεις Ζήτη, Θεσ/κη 1992.*
- ***Μανατάκης Μανώλης,*** *Εφαρμοσμένη Στατιστική, Πάτρα 1989.*
- ***Παπαϊωάννου Τάκης,*** *Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστικής, Εκδ. Σταμούλη, Αθήνα 2005.*
- ***Κουνιάς & Μωυσιάδης,*** *Πιθανότητες, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσ/κη 1991.*
- ***Θεοδώρου Ι., Κικίλιας Π., κ .α.,*** *Στατιστική-Πιθανότητες, Εκδόσεις Δηρός, Αθήνα 2001.*
- ***Δαμιανού Χ., Παπαδάτος Ν., Χαραλαμπίδης Χ.Α.,*** *Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική (Διδακτικές Σημειώσεις), Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα 2003.*
- ***Χρυσαφίνου Ουρ., Μπουρνέτας Απ., Βαγγελάτου Ευτ.,*** *Πιθανότητες-Στατιστική (Σημειώσεις), Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα 2006.*

ΔΙΕΘΝΗΣ

- ***Papoulis Athanasios, Pilllai Unnikrishna S.,*** *Πιθανότητες, Τυχαίες Μεταβλητές & Στοχαστικές Διαδικασίες, Εκδόσεις Τζιόλα (4η Έκδοση), Θεσ/κη 2007.*
- ***Dalang Robert C., Conus Daniel,*** *Introduction à la théorie des probabilités, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne 2008.*
- ***Fredon Daniel,*** *Statistique et probabilités, Dunod, Paris 2009.*
- ***Guttman I., Wilks S.S., and Hunter J.S.,*** *Introductory Engineering Statistics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982.*
- ***Walpole R.E., and Myers R.H.,*** *Probability and Statistics for Engineers and Scientists, Macmillan Publishing Company, New York, 1985.*
- ***Johnson Richard A.,*** *Probability and Statistics for Engineers, Prentice-Hall, Inc., N.J., 1994.*
- ***Stark Henry, Woods Jhon W.,*** *Probability, Random Processes, and Estimation Theory for Engineers, Prentice-Hall, Inc., USA, N.J. 1994.*

<u>ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

<u>του Τμήματος ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ - ΑΤΕΙ Λαμίας</u>

10-5-2012

<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ-Ι</u>

<u>Εξάμηνο Α΄, 4ώρες/εβδομάδα (2Θ-2Α)</u>

- Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός συναρτήσεων μιας ανεξάρτητης μεταβλητής (παράγωγοι-διαφορικά, αόριστα-ορισμένα ολοκληρώματα, Εφαρμογές-μήκος τόξου καμπύλης-εμβαδά, κτλ),
- Γενικευμένα Ολοκληρώματα (ιδιαίτερα α’ είδους),
- Στοιχεία Σειρών (Κριτήρια σύγκλισης, Δυναμοσειρές Taylor-MacLaurin),
- Μιγαδικοί Αριθμοί (πράξεις, μορφές, ρίζες),
- Στοιχεία Διανυσματικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας,
- Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας και Θεωρίας Πινάκων (Γραμμικά συστήματα, ιδιοτιμές-ιδιοδιανύσματα),
- Στοιχεία Αριθμητικής Ανάλυσης (λύση εξισώσεων, μέθοδοι παρεμβολής).

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

1) ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, Τόμοι Α΄ και Β΄ (Διαφορικός-Ολοκληρωτικός Λογισμός & Άλγεβρα),

Δ. Δημητρακούδης, Ι. Θεοδώρου, Π. Κικίλιας, Δ. Τσουκαλάς και άλλοι, Εκδόσεις ΔΗΡΟΣ, Αθήνα 2001.

2) ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ, Π. Κικίλιας, Μ. Λαμπίρης, Α. Πετράκης, Εκδόσεις ΔΗΡΟΣ, Αθήνα 2001.

3) ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Murray Spiegel, McGraw-Hill, New York, Σειρά SCHAUM'S (ΕΣΠΙ, Μετάφραση Ιωάννης Σχοινάς), Αθήνα.

4) ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, McGraw-Hill, New York, Σειρά SCHAUM'S (ΕΣΠΙ, Μετάφραση Σωτήριος Περσίδης), Αθήνα.

5) ENGINEERING MATHEMATICS, Mary Attenborough, McGraw-Hill, (UK) 1998.

6) ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS, Erwin Kreyszig, JOHN WILEY & SONS, New York 1998.

*7) **(Βλ. και Σημειώσεις του Καθηγητή, Δρ. Ιωάννη Θεοδώρου)***

Σκοπός και στόχοι του μαθήματος:

Σκοπός του μαθήματος είναι η βασική υποδομή και η κατανόηση των θεμελιωδών εννοιών των ανώτερων μαθηματικών, από τους πρωτοετείς σπουδαστές.

Στόχοι είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές των ανώτερων μαθηματικών καθώς και η ευχερής εφαρμογή των εννοιών αυτών στις απαραίτητες υπολογιστικές διαδικασίες των θετικών επιστημών-τεχνολογίας.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ-ΙΙ

Εξάμηνο Β΄, 6ώρες/εβδομάδα (2Θ-4Α)

● Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός συναρτήσεων πολλών ανεξάρτητων μεταβλητών (μερικές παράγωγοι-ολικά διαφορικά, ακρότατα πολυμεταβλητών συναρτήσεων, πολλαπλά ολοκληρώματα, εφαρμογές),

● Βασικές Διαφορικές Εξισώσεις 1ης τάξης (ομογενείς, γραμμικές, κλπ),

● Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις 2ης και ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές,

● Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης (διανυσματική συνάρτηση, κατευθυνόμενη παράγωγος, διανυσματικοί τελεστές-κλίση-απόκλιση-περιστροφή, εφαρμογές),

● Στοιχεία Πιθανοτήτων και Στατιστικής (θεμελιώδεις πιθανοθεωρητικές έννοιες, στοιχεία συνδυαστικής, τυχαίες μεταβλητές-κατανομές και βασικά χαρακτηριστικά (μέση τιμή, διασπορά, κτλ), στοιχεία περιγραφικής και πιθανοθεωρητικής στατιστικής).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ, Τόμοι Α΄ και Β΄ (Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών & Διαφορικές Εξισώσεις), Δ. Αναστασάτος, Ι. Θεοδώρου, Φ. Κομισόπουλος και άλλοι, Εκδόσεις ΔΗΡΟΣ, Αθήνα 2001.

2) ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, McGraw-Hill, New York, Σειρά SCHAUM'S (ΕΣΠΙ, Μετάφραση Σωτήριος Περσίδης), Αθήνα.

3) ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ, Π. Κικίλιας, Δ. Παλαμούρδας, Ι. Θεοδώρου και άλλοι, Εκδόσεις ΔΗΡΟΣ, Αθήνα 2001.

4) ADVANCED MODERN ENGINEERING MATHEMATICS, Glyn James et al., Addison-Wesley, 1994.

5) ADVANCED MATHEMATICS FOR ENGINEERS, Wilfred Kaplan (University of Michigan), Addison-Wesley, 1990.

6) ENGINEERING MATHEMATICS, Mary Attenborough, McGraw-Hill, (UK) 1998.

7) ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS, Erwin Kreyszig, JOHN WILEY & SONS, New York 1998.

8) ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ, Παπαϊωάννου Τάκης, Εκδ. Σταμούλη, Αθήνα 2005.

9) PROBABILITY AND STATISTICS, Michael Evans, Jeffrey Rosenthall, Εκδ. W. H. Freeman & Co Ltd, 2003.

10) ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ (Σημειώσεις), Χρυσαφίνου Ουρ., Μπουρνέτας Απ., Βαγγελάτου Ευτ., Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα 2006.

*11) **(Βλ. και Σημειώσεις του Καθηγητή, Δρ. Ιωάννη Θεοδώρου)***

Σκοπός και στόχοι του μαθήματος:

Σκοπός του μαθήματος (ως συνέχεια των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι) είναι η βασική υποδομή και η περαιτέρω κατανόηση των θεμελιωδών εννοιών των ανώτερων μαθηματικών, από τους πρωτοετείς σπουδαστές. Στόχοι είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές των ανώτερων μαθηματικών καθώς και η ευχερής εφαρμογή των εννοιών αυτών στις απαραίτητες υπολογιστικές διαδικασίες των θετικών επιστημών-τεχνολογίας.

Επίσης στόχος του μαθήματος είναι να προσφέρει τις βασικές έννοιες από τη Θεωρία Πιθανοτήτων-Στατιστικής, ένας τομέας απαραίτητος σήμερα σχεδόν σε κάθε σπουδαστή της Ανώτατης Εκπαίδευσης.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ -ΙΙΙ

Εξάμηνο Γ΄, 6ώρες/εβδομάδα (2Θ-2Α-2Ε)

- Μαθηματικά μοντέλα και βασικά χαρακτηριστικά Χρονοσυνεχών (αναλογικών) και Χρονοδιακριτών (ψηφιακών) Σημάτων-Συστημάτων, Γραμμικά Συστήματα και Γραμμικοί Μετασχηματισμοί,

- Μετασχηματισμός LAPLACE, Εφαρμογές αυτού στα Γραμμικά Χρονοαμετάβλητα (Linear Time Invariant-LTI) Συστήματα, Επίλυση αντίστοιχων Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων,

- Αρμονική Ανάλυση (Τριγωνομετρικές Σειρές FOURIER),

- Μετασχηματισμός FOURIER, Εφαρμογές αυτού στα Γραμμικά Χρονοαμετάβλητα (LTI) Συστήματα, Επίλυση αντίστοιχων Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων, (Συνάρτηση Μεταφοράς και Απόκριση Συστήματος),

- Μετασχηματισμός ΖΗΤΑ, Εφαρμογές αυτού στην ανάλυση χρονοδιακριτών (LTI) συστημάτων, Επίλυση αντίστοιχων Γραμμικών Εξισώσεων Διαφορών.

Εργαστήριο Μαθηματικών-ΙΙΙ (2ώρες/εβδομάδα):

Χρήση μαθηματικών πακέτων λογισμικού (Matlab ή Mathematica), για την ύλη των μαθημάτων ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΙΙ, ΙΙΙ.

Άμεση μελέτη και αναλυτική διάρθρωση της ύλης του Εργαστηρίου του μαθήματος

1. Από τις αντίστοιχες Διδακτικές Σημειώσεις των διδασκόντων:

«ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ», Θεοδώρου Ι., Κεχρινιώτης Αρ., Τριανταφύλλου Χρ.

2. **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ-ΙΙΙ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ**, (Νέο Πρόγραμμα Σπουδών-Γ104)

Επιλογή 2α: MATLAB για Επιστήμονες και Μηχανικούς, Χατζίκος Ευάγγελος,34812

Επιλογή 2β :Matlab 6 για μηχανικούς, Biran Adrian, Breiner Moshe, 9505

<u>Θεωρία Μαθηματικών-ΙΙΙ (4ώρες/εβδομάδα)</u>:

<u>Άμεση μελέτη και αναλυτική διάρθρωση της ύλης της Θεωρίας του μαθήματος</u>

(σύμφωνα με το βιβλίο του διδάσκοντα: Δρ. Ιωάννης Θεοδώρου-Τακτικός Καθηγητής):

1) ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE, FOURIER, ZHTA (ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Εφαρμογές στα Σήματα-Συστήματα), Ι. Θεοδώρου και άλλοι, Εκδόσεις ΔΗΡΟΣ, Αθήνα 2001.

<u>Γενικότερη Βιβλιογραφία</u>

2) SIGNALS and SYSTEMS, Alan Oppenhaim, Alan Willsky, M.I.T. and S. Nawab, (Boston Univ.), Prentice-Hall, 1997.

3) MATHEMATIQUES POUR L' ELECTRONIQUE, Jean-Claude Belloc, Patrice Shiller, (IUT), Masson, Paris 1994.

4) ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ, Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης, (Παν/μια Αθήνας-Πάτρας), ΤΥΠΟΘΗΤΩ-Γ. Δάρδανος, Αθήνα 1998.

5) ADVANCED MODERN ENGINEERING MATHEMATICS, Glyn James et al., Addison-Wesley, 1994.

6) LAPLACE and the Z-TRANSFORM, A.C. Grove, (Nottingham Polytechnic), Prentice-Hall 1991.

7) SCHAUM'S MATHEMATICA, Συγγραφέας DON, Εκδόσεις ΚΛΕΙΔΑΡΙΘΜΟΣ, 2006.

Σκοπός και στόχοι του μαθήματος:

Σκοπός του μαθήματος ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ-ΙΙΙ είναι να κατανοηθεί από κάθε διδασκόμενο η αναγκαιότητα εφαρμογής των μαθηματικών μοντέλων σε έννοιες και προβλήματα της σύγχρονης τεχνολογίας και ιδιαίτερα της Ηλεκτρονικής.
Στόχοι είναι:
- να αποδοθεί η αρμονική σύνδεση (μαθηματικής) Θεωρίας και (τεχνολογικής) Πράξης-Εφαρμογής,
- η εξοικείωση των σπουδαστών με τις τεχνολογικές εφαρμογές των Γραμμικών Μετασχηματισμών στην τεχνολογία και ιδιαίτερα της χρήσης των κατάλληλων μαθηματικών «εργαλείων» στην επεξεργασία και ανάλυση του βασικού τομέα των «Σημάτων-Συστημάτων» της Ηλεκτρονικής.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΣΤΗΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ (με χρήση και του MATLAB)

Εξάμηνο Ζ' (1Θ-1Α)

(Κατ' επιλογήν, υποχρεωτικό μάθημα)

- Εισαγωγή στην Ασαφή Λογική (ασαφές και κλασικό σύνολο-βασικά χαρακτηριστικά και άλγεβρα ασαφών συνόλων),
- Ασαφής Αριθμητική (πράξεις ασαφών αριθμών, LR, τριγωνικοί και τραπεζοειδείς ασαφείς αριθμοί),
- Γεωμετρία Ασαφών Συνόλων (Ασαφείς Υπερκύβοι),
- Εφαρμογές της Ασαφούς Λογικής στην Τεχνολογία (Ασαφή Συστήματα Ελέγχου-fuzzy control systems, π.χ. σε μη-επανδρωμένα οχήματα-ελικόπτερα, ABS και auto-parking αυτοκινήτων, οικιακές συσκευές (πλυντήρια, κλιματιστικά, τηλεοράσεις), ατμολέβητες, βιομηχανικές εφαρμογές, κ.λπ.).
- Ασαφή Συστήματα Ελέγχου με χρήση του λογισμικού ***MATLAB-FUZZY LOGIC TOOLBOX***

Άμεση μελέτη και αναλυτική διάρθρωση της ύλης του μαθήματος,

από το βιβλίο του διδάσκοντα:

«Εισαγωγή στην ΑΣΑΦΗ ΛΟΓΙΚΗ - Fuzzy Logic»,

Γιάννης Α. Θεοδώρου

Βασικές Αρχές της Ασαφούς Λογικής με Εφαρμογές στην Τεχνολογία,

(Στοιχεία Ασαφούς Συνολοθεωρίας-Ασαφούς Αριθμητικής-Ασαφούς Γραμμικής Άλγεβρας, Ασαφή Συστήματα Ελέγχου-Εφαρμογές MATLAB)

Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη 2010, (ISBN 978-960-418218-3).

Γενικότερη Βιβλιογραφία

1) FUZZY SETS and FUZZY LOGIC, G. Klir, B. Yuan, Prentice-Hall, New Jersey 1995.

2) FUZZY ENGINEERING, B. Kosko, Upper Saddle River, N J-Prentice Hall,1997.

3) FUZZY SETS AND SYSTEMS: THEORY AND APPLICATIONS, D. Dubois, H. Prade, Academic Press, New York, 1980.

4) AN INTRODUCTION TO FUZZY LOGIC APPLICATIONS IN INTELLIGENT SYSTEMS, Lotfi Zadeh, R. Yager, Kluwer academic Publishers, 1993.

5) FUZZY LOGIC, H. Nguyen, E. Walker, Chapman & Hall/CRS, 2002.

6) FUZZY CONTROL and FUZZY SYSTEMS, W. Pedrycz, Research Studies Press, 1996.

7) FUZZY LOGIC with ENGINEERING APPLICATIONS, Timothy J. Ross, McGraw-Hill, Inc.,1995.

8) MULTISTAGE FUZZY CONTROL, J. Kacprzyk, John Wiley & Sons, England 1997.

Σκοπός και στόχοι του μαθήματος:

Σκοπός του μαθήματος είναι να εφοδιάσει τον σπουδαστή με τις βασικές έννοιες της σύγχρονης Θεωρίας της Ασαφούς Λογικής (FUZZY LOGIC).

Στόχοι είναι, η κατανόηση της επέκτασης της (αριστοτέλειας) δίτιμης λογικής στην «πολύτιμη» λογική των ασαφών συνόλων, καθώς και η απόκτηση βασικών γνώσεων για την ευρύτατη εφαρμογή τους σε προβλήματα αιχμής της σύγχρονης τεχνολογίας-επιστήμης (Ασαφή Συστήματα Ελέγχου με χρήση του MATLAB).